

ŒUVRES
COMPLÈTES
D'AUGUSTIN CAUCHY

PARISIENS SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE
DE L'ACADEMIE DES SCIENCES
ET BOÎTE AUX APPAREILS
DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

—
II^e SÉRIE. — TOME IV.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC XCIX

SECONDE SÉRIE.

- I. MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADEMIE.
- II. OUVRAGES CLASSIQUES.
- III. MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.
- IV. MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

II.

OUVRAGES CLASSIQUES.

**SOMMAIRE DES MATIÈRES
CONTENUES DANS LE TOME IV.**

Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul différ-	entiel
Leçons sur le Calcul différentiel

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

900

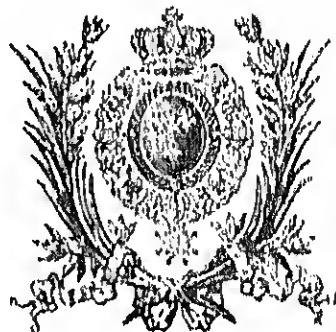
LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

La Résumé des Leçons données à l'École morale Politechnique devait comprendre deux volumes dont le premier seul a été publié par Gauthier-Lafleur de 1870. L'autre premier n'a cependant pas été conservé dans cette édition, alors d'éviter toute confusion.

RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL;

PAR M. AUGUSTIN-Louis CAUCHY,
Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique,
Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpençie, n.^e 7.

1823.

AVERTISSEMENT.

CET ouvrage, entrepris sur la demande du Conseil d'instruction de l'Ecole royale polytechnique, offre le résumé des Leçons que j'ai données à cette Ecole sur le calcul infinitésimal. Il sera composé de deux volumes correspondans aux deux années qui forment la durée de l'enseignement. Je publie aujourd'hui le premier volume divisé en quarante Leçons, dont les vingt premières comprennent le calcul différentiel, et les vingt dernières une partie du calcul intégral. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui se trouvent exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes ; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de terme complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'il-

Avertissement.

auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes, et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le théorème de Taylor semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée [*voyez* la fin de la 38.^e Leçon]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries.

Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* ayant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'*intégrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*. Ces dernières pouvant être quelquefois infinies ou indéterminées, il était essentiel de rechercher dans quels cas elles conservent une valeur unique et finie. Le moyen le plus simple de résoudre la question est l'emploi des *intégrales définies singulières* qui sont l'objet de la 25.^e Leçon. De plus, parmi les valeurs en nombre infini, que l'on peut attribuer à une intégrale terminée, il en existe une qui mérite une attention particulière, et que nous avons nommée *valeur principale*. La considération des intégrales définies singulières et celle des valeurs principales

AVERTISSEMENT.

des intégrales indéterminées sont très-utiles dans la solution d'une foule de problèmes. On en déduit un grand nombre de formules générales propres à la détermination des intégrales définies, et semblables à celles que j'ai données dans un Mémoire présenté à l'Institut en 1814. On trouvera dans les Leçons 34 et 39 une formule de ce genre appliquée à l'évaluation de plusieurs intégrales définies, dont quelques-unes étaient déjà connues.

RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIÈRE LEÇON.

DES VARIABLES, DE LEURS LIMITES ET DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES.

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; et le rayon vecteur, muné du centre d'une hyperbole à un point de la courbe qui s'éloigne de plus en plus de ce centre, forme avec l'axe des x un angle qui a pour limite l'angle formé par l'asymptote avec le même axe; Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation *lim* placée devant cette variable.

pression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ croîtra elle-même avec le nombre entier m , en demeurant toujours comprise entre les deux sommes

$$1 + \frac{1}{1} < 1 + \alpha$$

et

$$1 + \frac{1}{1} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{4} + \dots + 1 + \frac{1}{m} + \dots + 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + \alpha$$

donc elle s'approchera indéfiniment, pour des valeurs croissantes de m , d'une certaine limite comprise entre α et 3. Cette limite est un nombre qui joue un grand rôle dans le Calcul infinitésimal, et qu'on est convenu de désigner par la lettre e . Si l'on prend $m=10000$, on trouvera pour valeur approchée de e , en faisant usage des Tables de logarithmes décimaux,

$$\left(\frac{10000}{10000}\right)^{10000} = 2,7183.$$

Cette valeur approchée est exacte à $\frac{1}{10000}$ près, ainsi que nous le verrons plus tard.

Supposons maintenant que α , toujours positif, ne soit plus de la forme $\frac{1}{m}$. Désignons dans cette hypothèse par m et $n=m+\nu$ les deux nombres entiers immédiatement inférieur et supérieur à $\frac{1}{\alpha}$, de sorte qu'on ait

$$\frac{1}{\alpha} - m < \mu = n - \nu,$$

μ et ν étant des nombres compris entre zéro et l'unité. L'expression $(1+\alpha)^\frac{1}{\alpha}$ sera évidemment renfermée entre les deux suivantes

$$\left(1+\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{1}{\mu}} < \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{1+\frac{\mu}{m}}} < \left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{\frac{1}{\nu}} < \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{1+\frac{\nu}{n}}};$$

et, comme, pour des valeurs de α décroissantes à l'infini ou, ce qui revient au même, pour des valeurs toujours croissantes de m et de n , les deux quantités $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ convergent l'une et l'autre

14. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

Souvent les limites vers lesquelles convergent des expressions variables se présentent sous une forme indéterminée, et notamment on peut encore fixer, à l'aide de méthodes particulières, les véritables valeurs de ces mêmes limites. Ainsi, par exemple, les limites dont s'approchent indéfiniment les deux expressions variables

$$\frac{\sin z}{z} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tan z}$$

tandis que z converge vers zéro, se présentent sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ et $\frac{1}{0}$, et pourtant ces deux limites ont des valeurs fixes que l'on peut calculer comme il suit.

On a évidemment, pour de très petites valeurs numériques de z ,

$$\frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = \frac{\sin z}{z}$$

Par conséquent le rapport $\frac{\sin z}{z}$, toujours compris entre les deux quantités $\frac{\sin z}{z}$ et $\frac{\sin z}{\operatorname{tang} z}$, dont la première sert de limite à la seconde, aura lui-même l'unité pour limite.

Cherchons maintenant la limite vers laquelle converge l'expression $(1 + \frac{z}{m})^{\frac{1}{z}}$, tandis que z s'approche indéfiniment de zéro. Si l'on suppose d'abord la quantité m positive et de la forme $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ désignant un nombre entier variable et susceptible d'un accroissement indéfini, on aura

$$\begin{aligned} (1 + \frac{z}{m})^{\frac{1}{z}} &= \left(1 + \frac{1}{nm}\right)^{nm} \\ &= \left(1 + \frac{1}{nm}\right) \left(1 + \frac{1}{nm}\right)^{n-1} \cdots \left(1 + \frac{1}{nm}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{nm}\right)^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{m^n} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{m}\right)$$

Comme, dans le second membre de cette dernière formule, les termes qui renferment la quantité m sont tous positifs et croissent en valeurs et en nombre en même temps que cette quantité, il est clair que l'ex-

pression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ croîtra elle-même avec le nombre entier m , en demeurant toujours comprise entre les deux sommes

$$1 + \frac{1}{1} < a$$

et

$$1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots < a < 1 + \frac{1}{e} + 3,$$

donc elle s'approchera indéfiniment, pour des valeurs croissantes de m , d'une certaine limite comprise entre e et 3. Cette limite est un nombre qui joue un grand rôle dans le Calcul infinitésimal, et qu'on est convenu de désigner par la lettre e . Si l'on prend $m = 1000$, on trouvera pour valeur approchée de e , en faisant usage des Tables de logarithmes décimaux,

$$\left(\frac{1000}{1000}\right)^{1000} = 2,7183,$$

Cette valeur approchée est exacte à $\frac{1}{10000}$ près, ainsi que nous le verrons plus tard.

Supposons maintenant que α , toujours positif, ne soit plus de la forme $\frac{1}{m}$. Désignons dans cette hypothèse par m et $n = m + 1$ les deux nombres entiers immédiatement inférieur et supérieur à α , au surplus qu'on ait

$$\frac{1}{m} < \alpha < \frac{1}{n} \quad m < n < \alpha$$

m et n étant des nombres compris entre zéro et l'unité. L'expression $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ sera évidemment enfermée entre les deux suivantes

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} < \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{\frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{1}{m+1}}$$

et, comme, pour des valeurs de α décroissantes à l'infini ou, en qui revient au même, pour des valeurs toujours croissantes de m et de n , les deux quantités $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ convergent l'une et l'autre

16. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL

vers la limite a , tandis que $(1 + \frac{a}{m})^m$ et $(1 + \frac{a}{n})^n$ s'approchent indéfiniment de la limite e , il en résulte que chacune des expressions

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

et par suite l'expression intermédiaire $(1 + z)^{\frac{1}{z}}$ convergeront également vers la limite e .

Supposons enfin que z devienne une quantité négative. Si l'on fait dans cette hypothèse

$$1 + z = e^{-\beta}$$

β sera une quantité positive qui convergera elle-même vers zéro. On trouvera

$$(1 + z)^{\frac{1}{z}} = (e^{-\beta})^{\frac{1}{-\beta}} = \left(e^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

puis, en passant aux limites,

$$\lim (1 + z)^{\frac{1}{z}} = \lim (e^{-\beta})^{\frac{1}{\beta}} = e^0 = 1$$

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent indéfiniment de manière à dépasser au-dessus de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infinité petit* ou une quantité infinitement petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite. Telle est la variable z dans les calculs qui précèdent.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'infini ∞ indiqué par le signe ∞ ; si l'il s'agit d'une variable positive; et l'infini négatif indiqué par la notation $-\infty$, si l'il s'agit d'une variable négative. Tel est le nombre variable m que nous avons employé et dé-

DEUXIÈME LEÇON.

DES FONCTIONS CONTINUES ET DISCONTINUES. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE
DES FONCTIONS CONTINUES.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on connaît d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on connaît ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables. Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces variables. Ainsi, par exemple,

$$1. x, \quad \sin x, \quad \dots$$

sont des fonctions de la variable x ;

$$x + y, \quad xy, \quad xyz, \quad \dots$$

des fonctions des variables x et y ou x , y et z , etc.

18 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Lorsque des fonctions d'une ou plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais, lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables sont appelées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, y étant une fonction implicite de x , déterminée par l'équation

$$L(y, x) = 0,$$

si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction, devenue explicite par la résolution de l'équation donnée, sera

$$y = A^x.$$

Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une seule variable x ou de plusieurs variables x, y, z, \dots , sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations

$$\begin{aligned} f(x), & \quad F(x), \quad \varphi(x), \quad \chi(x), \quad \psi(x), \quad \alpha(x), \dots \\ f(x, y, z, \dots), & \quad F(x, y, z, \dots), \quad \varphi(x, y, z, \dots), \quad \chi(x, y, z, \dots), \dots \end{aligned}$$

Souvent, dans le calcul, on se sert de la caractéristique Δ pour indiquer les accroissements simultanés de deux variables qui dépendent l'une de l'autre. Cela posé, si la variable y est exprimée en fonction de la variable x par l'équation

$$(1) \qquad \qquad \qquad y = f(x),$$

Δy , ou l'accroissement de y correspondant à l'accroissement Δx de la variable x , sera déterminé par la formule

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Plus généralement, si l'on suppose

$$(3) \quad f(x, y) = 0,$$

on aura

$$(4) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Il est bon d'observer que, des équations (1) et (2) réunies, on conclut

$$(5) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Soient maintenant h et i deux quantités distinctes, la première finie, la seconde infiniment petite, et $\alpha = \frac{i}{h}$ le rapport infiniment petit de ces deux quantités. Si l'on attribue à Δx la valeur finie h , la valeur de Δy , donnée par l'équation (5), deviendra ce qu'on appelle la *différence finie* de la fonction $f(x)$, et sera ordinairement une quantité finie. Si, au contraire, l'on attribue à Δx une valeur infiniment petite, si l'on fait par exemple

$$\Delta x := i - \alpha h,$$

la valeur de Δy , savoir

$$f(x + i) - f(x) = 0 - f(x + \alpha h) = -f'(x)h,$$

sera ordinairement une quantité infiniment petite. C'est en que l'on vérifiera aisément à l'égard des fonctions

$$\Lambda^x, \sin x, \cos x$$

auxquelles correspondent les différences

$$\begin{aligned} & \Lambda^{x+i} - \Lambda^x = (\Lambda^{i-1}) \Lambda^x, \\ & \sin(x + i) - \sin x = -\alpha \sin \frac{i}{\alpha} \cos \left(x + \frac{i}{\alpha} \right), \\ & \cos(x + i) - \cos x = -\alpha \sin \frac{i}{\alpha} \sin \left(x + \frac{i}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

dont chacune renferme un facteur Λ^{i-1} ou $\sin \frac{i}{\alpha}$ qui converge indéfiniment avec i vers la limite zéro.

Lorsque, la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et si

20. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence

$$f(x + \delta) - f(x)$$

est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est *fonction continue* de la variable x entre les limites dont il s'agit.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites, même très rapprochées, qui renferment la valeur en question.

Enfin, lorsqu'une fonction cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x , on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*. Ainsi, par exemple, il y a solution de continuité dans la fonction $\frac{1}{x}$ pour $x = 0$; dans la fonction tangente pour $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$, k étant un nombre entier quelconque; etc.

Il après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable x est continue par rapport à cette variable, et faire, pour de plus amples développements, le Chapitre II de la 1^e Partie du *Cours d'Analyse*, publié en 1867 (vol. 1).

Concevons le présent que l'on construise la courbe qui a pour équation en coordonnées rectangulaires $y = f(x)$. Si la fonction $f(x)$ est continue entre les limites $x = x_0, x = X_0$, à chaque abscisse x comprise entre ces limites correspondra une seule ordonnée y et de plus, x venant à croître d'une quantité infiniment petite Δx , y croîtra d'une quantité infiniment petite Δy . Par suite, les deux abscisses très rapprochées $x_0, x_0 + \Delta x$ correspondront deux points très rapprochés l'un de l'autre, puisque leur distance $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ sera elle-même une quantité infiniment petite. Ces conditions ne peuvent être satisfaites qu'autant que les différents points forment une ligne continue entre les limites $x = x_0, x = X_0$.

Exemples. — Construire les courbes représentées par les équations

$$y = x^m, \quad y = \frac{1}{x^m}, \quad y = Ax^x, \quad y = Lx, \quad y = \sin x,$$

dans lesquelles A désigne une constante positive et m un nombre entier.

Déterminer les formes générales de ces mêmes courbes.

fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \text{ ou } f'(x).$$

Dans la recherche des dérivées des fonctions d'une seule variable x , il est utile de distinguer les fonctions que l'on nomme *simples*, et que l'on considère comme résultant d'une seule opération effectuée sur cette variable, d'avec les fonctions que l'on construit à l'aide de plusieurs opérations et que l'on nomme *composées*. Les fonctions simples que produisent les opérations de l'Algèbre et de la Trigonométrie (voir la 1^{re} Partie du *Cours d'Analyse*, Chap. I) peuvent être réduites aux suivantes

$$a + ax, \quad a + x^m, \quad ax^a - \frac{a}{x}, \quad x^a, \quad Ax^a, \quad \ln x,$$

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x,$$

A désignant un nombre constant, a : une quantité constante, et la lettre t l'indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est A . Si l'on prend une de ces fonctions simples pour y , il sera facile en général d'obtenir la fonction dérivée y' . On trouvera, par exemple, pour $y = a + ax$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + ax + t) - (a + ax)}{t} = t, \quad y' = 1;$$

pour $y = a + x^m$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + x + t)^m - (a + x)^m}{t} = mx^{m-1}, \quad y' = mx^{m-1};$$

pour $y = ax^a$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x + t)^a - ax^a}{t} = a, \quad y' = a;$$

pour $y = \frac{a}{x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+t} - \frac{a}{x}}{t} = \frac{a}{x(x+t)}, \quad y' = -\frac{a}{x^2};$$

24. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

pour $y = \sin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{x+i}{2}}{\frac{i}{2}} \cos(x + \frac{1}{2}i), \quad y' := \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

pour $y = \cos x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{x+i}{2}}{\frac{i}{2}} \sin(x + \frac{1}{2}i), \quad y' := -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

De plus, en posant $i := \alpha x$, $\Lambda^i := 1 + \beta$ et $(1 + \alpha)^a := 1 + \gamma$, on trouvera pour $y := \text{L}x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{L}(x+i)}{i} = \frac{\text{L}x}{\alpha x} \cdot \frac{\text{L}(1+\alpha)}{\alpha}, \quad y' := \frac{\text{L}x}{x};$$

pour $y := \Lambda^x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Lambda^{x+i} - \Lambda^x}{i} = \frac{\Lambda^i - 1}{i} \cdot \Lambda^{x+i-1} = \frac{\Lambda^i - 1}{\text{L}(1+\beta)\beta}, \quad y' := \frac{\Lambda^x}{\text{L}x};$$

pour $y := x^a$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha} x^{a-1} \cdot \frac{\text{L}(1+\alpha)^\frac{1}{\alpha}}{\text{L}(1+\gamma)^\frac{1}{\gamma}} x^{a-1}, \quad y' := a x^{a-1}.$$

Dans ces dernières formules, la lettre a désigne le nombre $3,718\dots$ qui sert de limite à l'expression $(1+\alpha)^\frac{1}{\alpha}$. Si l'on prend ce nombre pour base d'un système de logarithmes, on obtiendra les logarithmes *népériens ou hyperboliques*, que nous indiquerons toujours à l'aide de la lettre L. Cela posé, on aura évidemment

$$\text{L}e := 1, \quad \text{Le} := \frac{\text{L}e}{\text{L}\Lambda} = \frac{\text{L}e}{\text{L}A} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

et de plus on trouvera, pour $y := \text{L}x$,

$$y' := \frac{1}{x};$$

pour $y := e^x$,

$$y' := e^x,$$

Les diverses formules qui précèdent étant établies seulement pour les valeurs de a auxquelles correspondent des valeurs réelles de y , on doit supposer a positive dans celles de ces formules qui se rapportent aux fonctions $\text{L}x$, $\text{L}x^a$ et même à la fonction a^x , lorsque a désigne une fraction de dénominateur pair ou un nombre irrationnel.

Soit maintenant z une seconde fonction de x , liée à la première $y = f(x)$ par la formule

$$(2) \quad z = F(y),$$

z ou $F\{f(x)\}$ sera ce qu'on appelle une *fonction de fonction* de la variable x ; et, si l'on désigne par Δx , Δy , Δz les accroissements infinitésimaux et simultanés des trois variables x , y , z , on trouvera

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y) + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y - F(y)}{\Delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

puis, en passant aux limites,

$$(3) \quad z' = y' F'(y) = f'(x) F\{f(x)\}.$$

Par exemple, si l'on fait $z = ay$ et $y = \text{L}x$, on aura

$$z' = ay' + a \cdot \frac{a}{x}.$$

A l'aide de la formule (3), on déterminera facilement les dérivées des fonctions simples A^x , x^a , $\arcsin x$, $\arccos x$ en supposant comme celles des fonctions $\text{L}x$, $\sin x$, $\cos x$. On trouvera, en effet, pour

$$y = A^x,$$

$$\text{L}y = x \text{L}A = y' \frac{\text{L}A}{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{\text{L}A} = A^x (\text{L}A)$$

pour $y = x^a$,

$$\text{L}y = a \text{L}x \quad \Rightarrow \quad y' \frac{1}{y} = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = a \frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$$

pour $y = \arcsin x$,

$$\sin y = x \quad \Rightarrow \quad y' \cos y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

26. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

pour $y = \arctan x$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = \arctan x_1 - \arctan x_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

De plus, les dérivées des fonctions composées

$$y_1 = \arctan u$$

étant respectivement, en vertu de la formule (1),

$$y'_1 = \operatorname{tg} u \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{tg} u} \cdot u'$$

les dérivées des suivantes

$$y_0 = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(u_0) = \frac{1}{\operatorname{tg} u_0} = \operatorname{cotg} u_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} u_0}$$

deviendront

$$y'_0 = \operatorname{tg}' x = \operatorname{tg}'(u_0) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u_0} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u_0}$$

Nous remarquerons, en finissons, que les dérivées des fonctions composées se déterminent quelquefois assez facilement à partir des fonctions simples. Ainsi, par exemple, pour donner

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctan} x) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin t}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t}{t} \left[\operatorname{tg}(t + \Delta t) - \operatorname{tg} t \right] = \operatorname{tg}(t + \Delta t) - \operatorname{tg} t$$

$$\text{pour } y = \operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin t}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{t}{t} \left[\operatorname{tg}(t + \Delta t) - \operatorname{tg} t \right] = \operatorname{tg}(t + \Delta t) - \operatorname{tg} t$$

et l'on en conclut, pour $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctan} x)$,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctan} x) = 1 - \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 - \frac{x}{x} = 1 - \operatorname{cotg} x = 0$$

$\operatorname{tg} y = 0$ est une équation

$$\operatorname{tg} y = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\sin y} = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

QUATRIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Soyons toujours $y = f(x)$ une fonction de la variable indépendante x ; i une quantité infiniment petite, et h une quantité finie. Si l'on pose $i = zh$, x sera encore une quantité infiniment petite, et l'on aura identiquement

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+zh) - f(x)}{zh},$$

d'où l'on conclura

$$(1) \quad \frac{f(x+zh) - f(x)}{zh} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}_h,$$

la limite vers laquelle converge le premier membre de l'équation (1), tandis que la variable x s'approche indéfiniment de zéro, la quantité h demeurant constante, est ce qu'on appelle la *differentialle* de la fonction $y = f(x)$. On indique cette différentielle par la caractéristique dx , ainsi qu'il suit :

$$dx = \lim_{h \rightarrow 0} df(x)_h.$$

Il est facile d'obtenir sa valeur lorsqu'on connaît celle de la fonction dérivée y' ou $f'(x)$. En effet, en prenant les limites des deux membres de l'équation (1), on trouvera généralement

$$(2) \quad df(x) = h f'(x).$$

Dans le cas particulier où $f(x) = x$, l'équation (2) se réduit à

$$(3) \quad dx = h.$$

98. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

Ainsi la différentielle de la variable indépendante n'est d'autre chose que la constante finie k . Cela posé, l'équation (1) devient

$$(2) \quad dy = f(x)dx$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Il résulte de ces dernières que la dérivée $y' = f(x)$ d'une fonction quelconque $y = f(x)$ est précisément égale à $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire au rapport entre la différentielle de la fonction et celle de la variable ou, si l'on veut, au coefficient par lequel il faut multiplier la seconde différentielle pour obtenir la première. C'est pour cette raison qu'on donne quelquefois à la fonction dérivée le nom de *coefficients différentiel*.

Differentier une fonction, c'est trouver sa différentielle. L'opération par laquelle on différentie s'appelle *differentiation*.

En vertu de la formule (3), on obtiendra immédiatement les différentielles des fonctions dont on aura calculé les dérivées. Si l'on applique d'abord cette formule aux fonctions simples, on trouvera

$$d\sin x = dx \cdot \frac{dy}{dx} = dx \cdot \cos x = \cos x dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x = -\sin \frac{dy}{dx}$$

$$d\lambda x^2 = \lambda x dx + x^2 dx$$

$$d\ln x = \frac{dx}{x} = \frac{dx}{x} + \frac{x^2}{x^2} dx$$

$$d\sin x = \cos x dx - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$d\cos x = -\sin x dx - \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

et de même pour les autres fonctions.

On peut évidemment écrire

et de même pour les autres fonctions.

On peut évidemment écrire

et de même pour les autres fonctions.

On établira de même les équations

$$\begin{array}{lll} d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, & d \operatorname{cot} x = \frac{dx}{\sin^2 x}, \\ d \operatorname{arc tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, & d \operatorname{arc cot} x = \frac{dx}{1+x^2}, \\ d \operatorname{arc sec} x = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}, & d \operatorname{arc cosec} x = \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}. \end{array}$$

Ces diverses équations, ainsi que celles auxquelles nous sommes parvenus dans la façon précédente, ne doivent être considérées jusqu'à présent qu'avec démontrées que pour les valeurs de x auxquelles correspondent des valeurs réelles des fonctions dont on cherche les dérivées.

En conséquence, parmi les fonctions simples, celles dont les différentielles peuvent être comprises toutes pour des valeurs réelles quelconques de la variable x sont les suivantes

$$x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - \frac{x^6}{x} - \operatorname{arc sin} x - \operatorname{arc cos} x - \operatorname{arc tang} x$$

et la fonction x^n , lorsque la valeur numérique de n se réduit à un nombre entier ou à une fraction de dénominateur impair. Mais on doit supposer la variable x renfermée entre les deux limites $-\pi/2 < x < \pi/2$, dans les différentielles trouvées des fonctions simples $\operatorname{arc sin} x$, $\operatorname{arc cos} x$ et, entre les limites $0 < x < \pi$, dans les différentielles des fonctions $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cot} x$, et même dans celle de la fonction x^n , toutes les fois que la valeur numérique de n devient une fraction de dénominateur pair ou un nombre irrationnel.

Il est encore essentiel d'observer que, conformément aux conventions établies dans la 1^e Partie du *Cours d'Analyse*, nous faisons usage de l'une des notations

$$\operatorname{arc sin} x, \operatorname{arc cos} x, \operatorname{arc tang} x, \operatorname{arc cot} x, \operatorname{arc sec} x, \operatorname{arc cosec} x$$

pour représenter, non pas un quelconque des arcs dont une certaine ligne trigonométrique est égale à x , mais celui d'entre eux qui a la

30. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSTIMAL.

plus petite valeur numérique où, si ces arcs sont deux à deux égaux et de signes contraires, celui qui a la plus petite valeur positive; en conséquence, presque, les tangentes aux arcs, qui mesurent soit des arcs compris entre les limites $\frac{a_1}{f(x_1)} \text{ et } \frac{a_2}{f(x_2)}$, et autrement, une partie des arcs compris entre les limites a_1 et a_2 .

Lorsqu'on suppose $y = f(x)$ et $Ax = x - x_0$, l'équation (3), dont le second membre a pour limite dy , peut être présentée sous la forme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x) + \beta,$$

β désignant une quantité infiniment petite, et l'on en conclut

$$(3') \quad \Delta y = f(x) \Delta x + \beta \Delta x.$$

Soit z une seconde fonction de la variable x . On trouve de même

$$\Delta z = f'(x) \Delta x + \gamma \Delta x,$$

γ désignant encore une quantité infiniment petite. On trouvera par suite

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta x} &= f'(x) + \gamma, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f(x) + \beta. \end{aligned}$$

puis, en passant aux limites,

$$(3'') \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x) + \beta.$$

Ainsi, le rapport entre les différences infiniment petites de deux fonctions de la variable x a pour limite le rapport de leurs différentielles ou de leurs dérivées.

Supposons maintenant les fonctions y et z liées par l'équation

$$(3') \quad z = F(y);$$

On en conclut

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{F(y) + \Delta F(y) - F(y)}{\Delta y},$$

puis, en passant aux limites et ayant égard à la formule (2),

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta y} &= \frac{z'}{y'} = F'(y), \\ (9) \qquad \qquad dx &= F'(y) dy, \quad z' = y' F'(y). \end{aligned}$$

La seconde des équations (9) coïncide avec l'équation (3) de la Légion précédente. De plus, si l'on écrit dans la première $F(y)$ au lieu de z , on obtiendra la suivante

$$(10) \qquad \qquad \qquad dF(y) = F'(y) dy,$$

qui est semblable pour la forme à l'équation (4), et qui sert à différentier une fonction de y , lors même que y n'est pas la variable indépendante.

Exemples :

$$\begin{aligned} d(a + y) &= dy, \quad d(-y) = -dy, \quad d(y^m) = mdy = m^m e^m dy, \\ d(\ln y) &= \frac{dy}{y}, \quad d(\ln^m y) = \frac{dy}{y^m} = \frac{m}{y} dy, \quad d(\ln e^x) = \frac{dx}{e^x} = e^{-x} dx, \\ d(ax^m) &= adx^m + ma^{m-1} dx = dx^m + e^m dx = e^m dx, \\ d(\sin x) &= \frac{dx}{\sin x} = \frac{\cos x dx}{\sin x} = \frac{dx}{\tan x}, \quad d(\tan x) = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{dx}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

La première de ces formules prouve que l'addition d'une constante à une fonction n'en altère pas la différentielle ni, par conséquent, la dérivée.

CINQUIÈME LEÇON.

LA DIFFÉRENCE DEUXIÈME DE PROPOSITION CORRESPONDANT À LA FORME DE LA
DIFFÉRENTIELLE, CONSIDÉRÉE SOUS UN POINT DE VUE SPÉCIALISÉ, DANS LES
PROPOSITIONS.

Dans les leçons précédentes, nous avons toutes deux étudié l'on forme les dérivées et les différentielles des fonctions d'une seule variable. Nous allons ajouter aux recherches que nous avons faites à ce sujet de nouveaux développements.

Soient toujours x la variable indépendante et $Ax = xh = x\delta x$ un accroissement infiniment petit attaché à cette variable. On l'a dégagé par successives applications plusieurs fois de x , et par Ax_1, Ax_2, Ax_3, \dots les accroissements simultanés qu'elles renferment. Tandis que l'on fait croître x de Ax , les différentielles de x , de x_1, x_2, x_3, \dots seront, d'après leurs définitions mêmes, respectivement égales aux limites des rapports

$$\frac{Ax}{x^2}, \quad \frac{Ax_1}{x_1^2}, \quad \frac{Ax_2}{x_2^2}, \quad \frac{Ax_3}{x_3^2}, \dots$$

Cela pose, convenu d'abord que la fonction x soit la seconde de toutes les autres, en sorte qu'on ait

$$(1) \quad x = x_1 + dx_1 + dx_2 + dx_3 + \dots$$

On trouvera successivement

$$\frac{Ax}{x^2} = \frac{Ax_1 + Ax_2 + Ax_3 + Ax_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

$$\frac{Ax_1}{x_1^2} = \frac{Ax_1}{x_1^2} + \frac{Ax_2}{x_1^2} + \frac{Ax_3}{x_1^2} + \frac{Ax_4}{x_1^2}$$

puis, en passant aux limites,

$$(2) \quad \frac{dx}{x^2} = dx_1 + dx_2 + dx_3 + \dots$$

$$= dx_1 + dx_2 + dx_3 + \dots$$

Lorsqu'on divise par dx les deux membres de cette dernière équation, elle devient

$$(3) \quad s' = u' + v' + w' + \dots$$

De la formule (2) ou (3) comparée à l'équation (1), il résulte que *la différentielle ou la dérivée de la somme de plusieurs fonctions est la somme de leurs différentielles ou de leurs dérivées*. De ce principe découlent, comme on va le voir, de nombreuses conséquences.

Premièrement, si l'on désigne par m un nombre entier, et par a, b, c, \dots, p, q, r des quantités constantes, on trouvera

$$(4) \quad \begin{cases} d(u+v) = du+dv \\ d(u-v) = du-dv \\ d(au+bu) = adu+bdu \end{cases}$$

$$(5) \quad d(nu+bv+cw+\dots) = adu+bdu+cdu+\dots$$

$$(6) \quad \begin{cases} d(ax^m) = bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + px^0 + qx^{-1} \\ | max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + apx^0 + q| dx \end{cases}$$

Le polynôme $max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + pa^0 + qb^{-1}r$, dont tous les termes sont proportionnels à des puissances entières de la variable x , est ce qu'on nomme une *fonction entière* de cette variable. Si on le désigne par s , on aura, en vertu de l'équation (6),

$$s' = max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + apx^0 + qb^{-1}r.$$

D'où, pour obtenir la dérivée d'une fonction entière de x , il suffit de multiplier chaque terme par l'exposant de la variable et de diminuer chaque exposant d'une unité. Il est aisément de voir que cette proposition subsiste dans le cas où la variable devient imaginaire.

Soit maintenant

$$(7) \quad x = uwv\dots$$

Comme on aura, en supposant les fonctions u, v, w, \dots toutes positives,

$$(8) \quad Is' = Iu + Iv + Iw + \dots$$

IV. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉMAL.
et, dans tous les cas possibles,

$$(9) \quad \begin{aligned} v^2 &= u^2 e^v w^2, \dots \\ \frac{dv}{u} &= \frac{du}{u} + \frac{de}{e} + \frac{dw}{w}, \dots \end{aligned}$$

L'application du principe énoncé à la formule (3) on a la formule (10) qui fournit l'équation

$$(10) \quad \frac{dv}{u} = \frac{du}{u} + \frac{de}{e} + \frac{dw}{w} = \alpha$$

de laquelle on conclura

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(uvw, \dots) = uvw \alpha \left(\frac{du}{u} + \frac{de}{e} + \frac{dw}{w} \right) \\ uvw da + uwv de - uwv dw \end{array} \right.$$

Exemples :

$$\begin{aligned} d(uv) &= u dv + v du = d(uvw) = vwdu - uwvdv + uvwdv \\ d(x^2 e^{-x}) &= ((-1x)dx) = d(x^2 e^{-x}) = e^x e^{-x} \left(\frac{d}{dx} - x \right), \dots \end{aligned}$$

Soit encore

$$(12) \quad v = \frac{u}{\sqrt{e}}$$

En différentiant le ou $\frac{1}{2} \ln^2$, on trouvera

$$(13) \quad \frac{dv}{u} = \frac{du}{u} - \frac{de}{e}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{u}{v} \left(\frac{du}{u} - \frac{de}{e} \right)$$

et, par suite,

$$(14) \quad \frac{du}{v} = \frac{v du}{u} - \frac{u de}{v}$$

on obtient en même résultat, en observant que la différentielle
de v

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{1}{v} du + u \frac{1}{v^2} \cdot \frac{du}{u} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{de}{e}$$

Exemples :

$$d \tan x = d \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x d \sin x - \sin x d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d \cot x = - \frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d \frac{a}{x} = - \frac{adx}{x^2}, \quad d \frac{e^{ax}}{x} = \frac{e^{ax}}{x} \left(a - \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$d \frac{1/x}{x} = \frac{1-1/x}{x^2} dx, \quad d \frac{b}{a+x} = \frac{-b dx}{(a+x)^2}.$$

Si les fonctions u, v se réduisent à des fonctions entières, le rapport $\frac{u}{v}$ deviendra ce qu'on nomme une *fraction rationnelle*. On déterminera facilement sa différentielle à l'aide des formules (6) et (14).

Après avoir formé les différentielles du produit $uvw\dots$ et du quotient $\frac{u}{v}$, on obtiendra sans peine celles de plusieurs autres expressions telles que $u^v, u^{\frac{1}{v}}, u^{vv}, \dots$. En effet, on trouvera pour $s = u^v$,

$$1s = v \ln u, \quad \frac{ds}{s} = v \frac{du}{u} + \ln u dv, \quad ds = vu^{v-1} du + u^v \ln u dv;$$

pour $s = u^{\frac{1}{v}}$,

$$1s = \frac{1}{v} \ln u, \quad \frac{ds}{s} = \frac{du}{uv} - \ln \frac{dv}{v^2}, \quad ds = u^{\frac{1}{v}-1} \frac{du}{v} - u^{\frac{1}{v}} \ln u \frac{dv}{v^2};$$

pour $s = u^{vv}$,

$$1s = v^v \ln u, \quad ds = u^{vv} v^v \left(\frac{du}{u} + \frac{v}{v} \ln u dv + \ln u v dv \right);$$

Exemples :

$$dx^x = x^x (1+1x) dx, \quad dx^{\frac{1}{x}} = \frac{1-1x}{x^2} x^{\frac{1}{x}} dx, \quad dx^{x^x} = \dots$$

Nous terminerons cette Leçon en recherchant la différentielle d'une *fonction imaginaire*. On nomme ainsi toute expression qui peut être ramenée à la forme $u + v\sqrt{-1}$, u et v désignant deux fonctions

36 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

réelles. Cela posé, si l'on appelle *limite* d'une expression imaginaire variable ce que devient cette expression quand on y remplace la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ par leurs limites respectives, et si, de plus, on étend aux fonctions imaginaires les définitions que nous avons données pour les différences, les différentielles et les dérivées des fonctions réelles, on reconnaîtra que l'équation

$$s = u + v\sqrt{-1}$$

entraine les suivantes :

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v\sqrt{-1}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1},$$

$$s' = u' + v'\sqrt{-1}, \quad ds = du + dv\sqrt{-1}.$$

On aura, en conséquence,

$$(15) \quad d(u + v\sqrt{-1}) = du + dv\sqrt{-1}.$$

La forme de cette dernière équation est semblable à celle des équations (4).

Si l'on suppose en particulier

$$s = \cos x + \sqrt{-1} \sin x,$$

on trouvera

$$ds = \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right] dx = s\sqrt{-1} dx.$$

Ajoutons que les formules (4), (5), (6), (11) et (14) subsisteront lors même que les constantes a, b, c, \dots, p, q, r ou les fonctions u, v, w, \dots comprises dans ces formules deviendront imaginaires.



SIXIÈME LEÇON.

USAGE DES DIFFÉRENTIELLES ET DES FONCTIONS DÉRIVÉES DANS LA SOLUTION DE PLUSIEURS PROBLÈMES. MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. VALEURS DES FRACTIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME $\frac{p}{q}$.

Après avoir appris à former les dérivées et les différentielles des fonctions d'une seule variable, nous allons indiquer l'usage qu'on peut en faire pour la solution de plusieurs problèmes.

PROBLÈME I. — *La fonction $y = f(x)$ étant supposée continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, on demande si, à partir de cette valeur, la fonction croît ou diminue, tandis que l'on fait croître ou diminuer la variable elle-même.*

Solution. — Soient Δx , Δy les accroissements infiniment petits et simultanés des variables x , y . Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aura pour limite $\frac{dy}{dx} = y'$. On doit en conclure que, pour de très petites valeurs numériques de Δx et pour une valeur particulière x_0 de la variable x , le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera positif si la valeur correspondante de y' est une quantité positive et finie, négatif si cette valeur de y' est une quantité finie, mais négative. Dans le premier cas, les différences infiniment petites Δx , Δy étant de même signe, la fonction y croîtra ou diminuera, à partir de $x = x_0$, en même temps que la variable x . Dans le second cas, les différences infiniment petites étant de signes contraires, la fonction y croîtra si la variable x diminue, et décroîtra si la variable augmente.

Ces principes étant admis, concevons que la fonction $y = f(x)$ demeure continue entre deux limites données $x = x_0$, $x = X$. Si l'on fait croître la variable x par degrés insensibles depuis la première

38 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉMAL.

limite jusqu'à la seconde, la fonction y ira en croissant toutes les fois que sa dérivée étant finie aura une valeur positive, et en décroissant, toutes les fois que cette même dérivée obtiendra une valeur négative. Donc la fonction y ne pourra cesser de croître pour diminuer ou de diminuer pour croître qu'autant que la dérivée y' passera du positif au négatif ou réciproquement. Il est essentiel d'observer que, dans ce passage, la fonction dérivée deviendra nulle si elle ne cesse pas d'être continue.

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction $f(x)$ surpassé toutes les valeurs voisines, c'est-à-dire toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier x en plus ou en moins d'une quantité très petite, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction $f(x)$ est inférieure à toutes les valeurs voisines, elle prend le nom de *minimum*.

Cela posé, il est clair que, si les deux fonctions $f(x)$, $f'(x)$ sont continues dans le voisinage d'une valeur donnée de la variable x , cette valeur ne pourra produire un maximum ou un minimum de $f(x)$ qu'en faisant évanouir $f'(x)$.

PROBLÈME II. — Trouver les maxima et minima d'une fonction de la seule variable x .

Solution. — Soit $f(x)$ la fonction proposée. On cherchera d'abord les valeurs de x , par lesquelles la fonction $f(x)$ cesse d'être continue. À chacune de ces valeurs, s'il en existe, correspondra une valeur de la fonction elle-même qui sera ordinairement ou une quantité infinie, ou un maximum ou un minimum.

On cherchera, en second lieu, les racines de l'équation

$$(1) \qquad f'(x) = 0$$

avec les valeurs de x qui rendent la fonction $f'(x)$ discontinue, et parmi lesquelles on doit placer au premier rang celles que l'on déduit de la formule

$$f'(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

Soit $x = x_0$ une de ces racines ou une de ces valeurs. La valeur correspondante de $f(x)$, savoir $f(x_0)$, sera un maximum si, dans le voisinage de $x = x_0$, la fonction dérivée $f'(x)$ est positive pour $x < x_0$ et négative pour $x > x_0$. Au contraire, $f(x_0)$ sera un minimum si la fonction dérivée $f'(x)$ est négative pour $x < x_0$ et positive pour $x > x_0$. Enfin, si, dans le voisinage de $x = x_0$, la fonction dérivée $f'(x)$ était en constamment positive ou négative, la quantité $f(x_0)$ ne serait plus ni un maximum ni un minimum.

Exemples. — Les deux fonctions $x^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{x}$, qui deviennent discontinues en passant du réel à l'imaginaire, tandis que la variable x diminue en passant par zéro, obtiennent, pour $x = 0$, une valeur nulle, laquelle représente un minimum de la première fonction et un maximum de la seconde.

Les deux fonctions x^3 , $x^{\frac{3}{2}}$, dont les dérivées passent du positif au négatif en se réduisant à zéro ou à l'infini pour une valeur nulle de x , ont l'une et l'autre zéro pour valeur minimum. Quant aux deux fonctions x^3 , $x^{\frac{1}{3}}$, dont les dérivées deviennent encore nulles ou infinies pour $x = 0$, mais restent positives pour toute autre valeur de x , elles n'admettent ni maximum ni minimum.

La fonction $x^3 + px^2 + q$, dont la dérivée est $3x^2 + 2px$, obtient, pour $x = -\frac{2}{3}p$, la valeur minimum $q - \frac{4}{27}p^3$, ce qu'on vérifie aisément en mettant la fonction donnée sous la forme $(x + \frac{1}{3}p)^3 + q - \frac{1}{27}p^3$.

La fonction $\frac{Ae^x}{x}$, dont la dérivée est $\frac{Ae^x}{x}(1e^{-x} - Ae^{-x})$, obtient, pour $x = 1e^{-x}$, quand A surpassé l'unité, la valeur minimum $\frac{a}{1e^{-x}}$.

La fonction $\frac{1e^x}{x}$, dont la dérivée est $\frac{1}{x}(1e^{-x} - Ae^{-x})$, obtient, pour $x = 1e^{-x}$, la valeur maximum $\frac{1e^x}{x}$.

La fonction x^ae^{-x} , dont la dérivée est $x^{a-1}e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right)$, obtient, pour $x = a$, la valeur maximum a^ae^{-a} .

PROBLÈME III. — *Déterminer l'inclinaison d'une courbe en un point donné.*

50. RÉSUMÉ DES LECONS SUR LE CHANT PIANISTIQUE

Solution. — Considérons la courbe qui a pour équation $y = \ln x$ et donne des rectangles $x = f(x)$. Dans cette courbe, la corde menée du point (x_1, y_1) à un point x_2 ($x_2 > x_1$) avec l'axe de x se prolonge dans le sens des x positifs, et donc aussi dans y , l'autre élans, dont le premier mesure l'inclinaison de la corde par rapport à l'axe des x . Si le second point vient à se rapprocher, c'est-à-dire si l'aire infinitésimale petit du premier, la corde se confondra progressivement avec la tangente menée à la courbe par ce premier point, et l'inclinaison de la corde, par rapport à l'axe des x , deviendra l'inclinaison de la tangente ou ce qu'on nomme l'inclinaison de la courbe par rapport au même axe. Cela pose, comme l'inclinaison de la courbe, une valeur trigonométrique, la valeur numérique du rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, de telle que l'inclinaison de la courbe, à un point, tangente trigonométrique la valeur numérique de la limite vers laquelle ce rapport converge, c'est-à-dire de la fonction dérivée y' .

S'il y a donc de l'air dans un tube, la température de ce tube est parallèle ou perpendiculaire à l'axe du tube. C'est exactement ce qui arrive quand l'équilibre se déroule sur une surface plane.

Example:

Consequently, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ is a vector in V which is orthogonal to $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. This shows that V is a two-dimensional subspace of \mathbb{R}^2 .

Propriété IV. — *On démontre facilement que si deux fonctions distinctes sont égales dans deux termes quelconques de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alors elles doivent attribuer à cette variable une valeur particulière qui peut être trouvée par l'application de la propriété III.*

Solution. — Soit $y = \frac{1}{x}$. La fraction proposée s'écrit alors sous la forme d'une fonction de la variable x , et apparaît alors que la condition demandée

(2) Nous indiquons par les points de bâti, au fur et à mesure que nous avions des renseignements plus précis, les personnes qui ont été tuées ou blessées dans les combats en rapport avec nos forces.

$x = x_0$ réduise cette fraction à la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire qu'elle fasse évanouir y et z . Si l'on représente par Δx , Δy , Δz les accroissements infinitésimales et simultanés des trois variables x , y , z , on aura, pour une valeur quelconque de x ,

$$x = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{z}{y} \text{ ou } \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y}$$

et, pour la valeur particulière $x = x_0$,

$$(3) \quad x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}$$

Ainsi la valeur cherchée de la fraction x ou $\frac{z}{y}$ coïncidera généralement avec celle du rapport $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{z'}{y'}$.

Exemples. — On aura, pour $x > 0$,

$$\frac{\sin x - \cos x}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{(1+x)(1-x)}{1+x+1} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1-x^2}{2+x} \right)$$

pour $x = 1$,

$$\frac{1/x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{(x^n-1)}{x^{n+1}-1} = \frac{1}{n} \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^2 + x + \dots}$$

SEPTIÈME LEÇON.

VALEURS DE QUELQUES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LES FORMES INDETERMINÉES
 $\frac{0}{0}$, ∞^0 , ... RELATION QUI EXISTE ENTRE LE RAPPORT AUX DIFFÉRENCES FINIES ET
 LA FONCTION DÉRIVÉE.

Nous avons considéré dans la Leçon précédente les fonctions de la variable x , qui, pour une valeur particulière de la variable, se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Il arrive souvent que cette forme se trouve remplacée par l'une des suivantes : $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 , 0^∞ , ∞^∞ , ... Ainsi, lorsque $f(x)$ croît indéfiniment avec x , les valeurs particulières des deux fonctions

$$\frac{f(x)}{x}, \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

pour $x \rightarrow \infty$, se présentent sous les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 . Ces mêmes valeurs peuvent, en général, être facilement calculées à l'aide de deux théorèmes que nous avons établis dans l'*analyse algébrique* (Chap. III, p. 48 et 53) (¹). Mais nous nous bornerons ici à montrer par quelques exemples comment on peut résoudre les questions de cette espèce.

Soit proposée d'abord la fonction $\frac{x^a}{\ln x}$. A désignant un nombre supérieur à l'unité, et concevons que l'on cherche la véritable valeur de la fonction pour $x \rightarrow \infty$. On observera que, pour des valeurs de x supérieures à $\frac{1}{A}$, la fonction dérivée étant toujours positive, la fonction sera toujours croissante avec x . D'ailleurs, si l'on repre-

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 54 et 58.

sente par m un nombre entier susceptible d'un accroissement indéfini, l'expression

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda^m - (1 + \Lambda - 1)^m}{m} &= \frac{1}{m} + (\Lambda - 1) + \frac{m-1}{2}(\Lambda - 1)^2 \\ &\quad + \frac{(m-1)(m-2)}{3 \cdot 2}(\Lambda - 1)^3 + \dots \end{aligned}$$

aura évidemment pour limite l'infini positif. On troncera en conséquence

$$(1) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^x}{x} = \infty.$$

Il résulte de cette dernière formule que l'exponentielle Λ^x , lorsque le nombre Λ surpassé l'unité, finit par croître beaucoup plus rapidement que la variable x .

Cherchons, en second lieu, la véritable valeur de la fonction $\frac{\ln x}{x}$ pour $x = \infty$, la base des logarithmes étant un nombre Λ supérieur à l'unité. Comme, en faisant $y = \ln x$, on trouvera

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{y}{\Lambda^y},$$

et que la fonction $\frac{y}{\Lambda^y}$ aura pour limite $\frac{1}{\infty} = 0$, on en conclura

$$(2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Il en résulte que, dans un système dont la base est supérieure à l'unité, les logarithmes des nombres croissent beaucoup moins rapidement que les nombres eux-mêmes.

Cherchons encore la valeur de $x^{\frac{1}{x}}$ pour $x \rightarrow \infty$. Comme on aura évidemment

$$x^{\frac{1}{x}} = \Lambda^{\frac{\ln x}{x}},$$

on en tirera

$$(3) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \Lambda^0 = 1,$$

VI. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

Lorsqu'on remplace, dans les formules (2) et (3), x par $\frac{x}{h}$, on en conclut que les fonctions x/h et x convergent respectivement vers les limites a et b , tandis que l'on fait converger x vers la limite zéro.

Nous allons maintenant faire connaitre une relation digne de remarque (4) qui existe entre la dérivée $f'(x)$ d'une fonction quelconque $f(x)$ et le rapport aux différences finies $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si dans ce rapport on attribue à x une valeur particulière x_0 , et si l'on fait, en outre, $x_0+h=X$, il prendra la forme $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$. Cela posé, on établira sans peine la proposition suivante :

Théorème. — *Si la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x=x_0$ et X , on désigne par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ peut dans cet intervalle, le rapport aux différences finies*

$$(4) \qquad \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$$

sera nécessairement compris entre A et B.

Démonstration. — Désignons par ε_0 et deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de t inférieures à ε_0 , et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0 et X , le rapport

$$f(x+t)-f(x)$$

reste toujours supérieur à $f'(x)-\varepsilon_0$ et inférieur à $f'(x)+\varepsilon_0$. Si, entre les limites x_0 et X , on interpose $n-1$ valeurs nouvelles de la variable x , savoir

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_0, \quad x_2 = x_0 + 2\varepsilon_0, \quad \dots, \quad x_n = x_0 + n\varepsilon_0$$

manière à diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$x_1 - x_0 = \varepsilon_0, \quad x_2 - x_1 = \varepsilon_0, \quad \dots, \quad X - x_{n-1} = \varepsilon_0$$

ajouter sur ce sujet un Mémoire de M. Ampère, inséré dans le XIX^e Cours de l'École Polytechnique.

qui, étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ , les fractions

$$(5) \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \dots, \quad \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}},$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0) - \varepsilon$, $f'(x_0) + \varepsilon$, la seconde entre les limites $f'(x_1) - \varepsilon$, $f'(x_1) + \varepsilon$, ..., seront toutes supérieures à la quantité $A - \varepsilon$, et inférieures à la quantité $B + \varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (5) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction moyenne, c'est-à-dire comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère (*voir l'Analyse algébrique*, Note II, théorème XII). L'expression (4), avec laquelle cette moyenne coïncide, sera donc elle-même renfermée entre les limites $A - \varepsilon$, $B + \varepsilon$, et, comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit le nombre ε , on peut affirmer que l'expression (4) sera comprise entre A et B .

Corollaire. — Si la fonction dérivée $f'(x)$ est elle-même continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, en passant d'une limite à l'autre, cette fonction variera de manière à rester toujours comprise entre les deux valeurs A et B , et à prendre successivement toutes les valeurs intermédiaires. Donc alors toute quantité moyenne entre A et B sera une valeur de $f'(x)$ correspondante à une valeur de x renfermée entre les limites x_0 et $X = x_0 + h$ ou, ce qui revient au même, à une valeur de x de la forme

$$x_0 + \theta h = x_0 + \theta(X - x_0),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. En appliquant cette remarque à l'expression (4), on en conclura qu'il existe entre les limites 0 et 1 une valeur de θ propre à vérifier l'équation

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

36. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

On peut écrire la formule (1) de la manière suivante :

$$(1') \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{f'(x_0) - f(x_0)}{h}.$$

Cette dernière formule devient valable si quelle que soit la valeur de x représentée par x_0 , pourvu que le fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ restent continues entre les valeurs extrêmes $x = x_0$, $x = x_0 + h$, on aura généralement, sous cette condition,

$$(1'') \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{f'(x_0) - f(x_0)}{h}.$$

Puis, en écrivant Δx au lieu de h , on en trouve

$$(2) \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Il est évident d'observer que, dans le cas où $f'(x_0)$ désigne toujours un nombre réel, mais intérieur à l'autre.

Exemple. — En appliquant la formule (2) aux fonctions à 1 variable, on trouve

$$\frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h + \frac{h^2 - h}{h} = \frac{2x_0 + h - 1}{1 + \frac{h}{2x_0 + h}}.$$

HUITIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. DÉRIVÉES PARTIELLES
ET DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, \dots . Désignons par i une quantité infiniment petite, et par

$$\varphi(x_i + i, y, z, \dots), \quad \gamma(x_i, y_i + i, z, \dots), \quad \psi(x_i, y, z_i + i, \dots)$$

les limites vers lesquelles convergent les rapports

$$\frac{f(x_i + i, y, z, \dots) - f(x_i, y, z, \dots)}{i},$$

$$\frac{f(x_i, y_i + i, z, \dots) - f(x_i, y, z, \dots)}{i},$$

$$\frac{f(x_i, y, z_i + i, \dots) - f(x_i, y, z, \dots)}{i},$$

.....

tandis que i s'approche indéfiniment de zéro; $\varphi(x_i, y, z, \dots)$ sera la dérivée que l'on déduit de la fonction $u = f(x, y, z, \dots)$, en y considérant x comme seule variable ou ce qu'on nomme la *dérivée partielle* de u par rapport à x . De même, $\gamma(x_i, y_i + i, z, \dots), \psi(x_i, y, z_i + i, \dots)$ seront les dérivées partielles de u par rapport aux variables y, z, \dots

Tela posé, convenons que l'on attribue aux variables x, y, z, \dots des accroissements quelconques $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$, et soit Δu l'accroissement correspondant de la fonction u , en sorte qu'on ait

$$(1) \quad \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots).$$

48. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Si l'on assigne à $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ des valeurs finies h, k, l, \dots , la valeur de Δu , donnée par l'équation (1), deviendra ce qu'on appelle la *différence finie* de la fonction u et sera ordinairement une quantité finie. Si, au contraire, α désignant un rapport infiniment petit, l'on suppose

$$(2) \quad \Delta x = ah, \quad \Delta y = ak, \quad \Delta z = al, \quad \dots$$

la valeur de Δu , savoir

$$f(x + ah, y + ak, z + al, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

sera ordinairement une quantité infiniment petite; mais alors, en divisant cette valeur par α , on obtiendra la fraction

$$(3) \quad \frac{\Delta u}{\alpha} = \frac{f(x + ah, y + ak, z + al, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\alpha}$$

qui convergera, en général, vers une limite finie différente de zéro. Cette limite est ce qu'on nomme la *différentielle totale* ou simplement la *différentielle* de la fonction u . On l'indique, à l'aide de la lettre du , en écrivant

$$du \text{ ou } df(x, y, z, \dots).$$

Ainsi, quel que soit le nombre des variables indépendantes que renferme la fonction u , sa différentielle se trouvera définie par la formule

$$(4) \quad du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}.$$

Si l'on fait successivement $u = x, u = y, u = z, \dots$, on enchaînera des équations (2) et (4)

$$(5) \quad dx = h, \quad dy = k, \quad dz = l, \quad \dots$$

Par conséquent, les différentielles des variables indépendantes x, y, z, \dots ne sont autre chose que les constantes finies h, k, l, \dots

On détermine facilement la différentielle totale de la fonction

$$f(x, y, z, \dots)$$

lorsqu'on connaît ses dérivées partielles. En effet, si dans cette fonction on fait croître l'une après l'autre les variables x, y, z, \dots de quantités quelconques $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$, on tirera de la formule (8) de la leçon précédente une suite d'équations de la forme

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots) \\ = \Delta x \varphi(x + \theta_1 \Delta x, y, z, \dots), \\ f(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \dots) - f(x + \Delta x, y, z, \dots) \\ = \Delta y \psi(x + \Delta x, y + \theta_2 \Delta y, z, \dots), \\ f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \dots) \\ = \Delta z \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \theta_3 \Delta z, \dots), \\ \dots \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ désignant des nombres inconnus, mais tous compris entre zéro et l'unité. En ajoutant ces mêmes équations membre à membre, on trouvera

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots) \\ = \Delta x \varphi(x + \theta_1 \Delta x, y, z, \dots) + \Delta y \psi(x + \Delta x, y + \theta_2 \Delta y, z, \dots) \\ + \Delta z \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \theta_3 \Delta z, \dots) + \dots \end{array} \right.$$

Si, dans cette dernière formule, dont le premier membre peut être remplacé par Δu , on pose $\Delta x = zh, \Delta y = zk, \Delta z = xl$ et si l'on divise en outre les deux membres par z , on obtiendra la suivante

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta u}{z} = h \varphi(x + \theta_1 zh, y, z, \dots) + k \psi(x + zh, y + \theta_2 zk, z, \dots) \\ + l \phi(x + zh, y + zk, z + \theta_3 xl, \dots) + \dots \end{array} \right.$$

de laquelle on conclura, en passant aux limites, puis écrivant dx, dy, dz au lieu de zh, zk, xl, \dots

$$(8) \quad du = \varphi(x, y, z, \dots) dx + \psi(x, y, z, \dots) dy + \phi(x, y, z, \dots) dz + \dots$$

Pour abréger, on supprime ordinairement dans les équations (9) les lettres que nous avons placées au bas de la caractéristique d , et l'on représente simplement les dérivées partielles de u , prises relativement à x, y, z, \dots , par les notations

$$(10) \quad \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$$

Alors $\frac{du}{dx}$ n'est pas le quotient de du par dx ; et pour exprimer la différentielle partielle de u , prise relativement à x , il faut employer la notation $\frac{du}{dx} dx$, qui n'est point susceptible de réduction, à moins qu'on ne rétablisse la lettre x au bas de la caractéristique d . Lorsqu'on admet ces conventions, la formule (11) se réduit à

$$(11) \quad du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

Mais, comme il n'est plus permis d'effacer de cette dernière les différentielles dx, dy, dz, \dots , rien ne remplace la formule (10).

Tes définitions et les formules ci-dessus établies s'étendent sans difficulté au cas où la fonction u devient imaginaire. Ainsi, par exemple, si l'on pose $u = x + iy\sqrt{-1}$, les dérivées partielles de u et sa différentielle totale seront respectivement données par les équations

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{du}{dy} = \sqrt{-1}, \quad du = dx + \sqrt{-1} dy.$$

Nous indiquons, en finissant, un moyen fort simple de ramener le calcul des différentielles totales à celui des fonctions dérivées. Si dans l'expression $f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots)$, on considère α comme seule variable, et si l'on pose en conséquence

$$(12) \quad f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots) = F(\alpha),$$

on aura, non seulement

$$(13) \quad u = F(0),$$

52 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

mais encore

$$\Delta u = F(\alpha) - F(0)$$

et, par suite,

$$(16) \quad du = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = F'(0).$$

Ainsi, pour former la différentielle totale du , il suffira de calculer la valeur particulière que reçoit la fonction dérivée $F'(\alpha)$ pour $\alpha = 0$.

NEUVIÈME LEÇON.

POURAGE DES DÉRIVÉES PARTIELLES DANS LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES.
DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS IMPLICITES.

Soit $x = F(u, v, w, \dots)$ une fonction quelconque des quantités variables u, v, w, \dots que nous supposons être elles-mêmes fonctions des variables indépendantes x, y, z, \dots ; x sera une *fonction composée* de ces dernières variables; et, si l'on désigne par $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \dots$ des accroissements arbitraires simultanément attribués à u, v, w, \dots , les accroissements correspondants $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \dots, \Delta x$ des fonctions u, v, w, \dots, x seront liés entre eux par la formule

$$(1) \quad \Delta x = F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \dots) - F(u, v, w, \dots).$$

Soyent d'ailleurs $\Phi(u, v, w, \dots), X(u, v, w, \dots), \Psi(u, v, w, \dots), \dots$ les dérivées partielles de la fonction $F(u, v, w, \dots)$ prises successivement par rapport à u, v, w, \dots . Comme l'équation (6) de la Leçon précédente a lieu pour des valeurs quelconques des variables u, v, z, \dots et de leurs accroissements $\Delta u, \Delta v, \Delta z, \dots$, on en conclura, en remplaçant u, v, z, \dots par u, v, w, \dots et la fonction f par la fonction F ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \dots) - F(u, v, w, \dots) \\ = \Delta u \Phi(u + \theta_1 \Delta u, v, w, \dots) + \Delta v X(u + \theta_2 \Delta v, w, \dots) \\ + \Delta w \Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \theta_3 \Delta w, \dots) + \dots \end{array} \right.$$

Dans cette dernière équation, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ désignent toujours des nombres inconnus, mais inférieurs à l'unité. Si maintenant on pose

$$\Delta c = gh - xdu, \quad \Delta r = zk - xdy, \quad \Delta z = xl - xdz, \quad \dots$$

34 - RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INTÉGRAL.
et que l'on divise par π les deux membres de l'équation (1), on en tirera

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{x} = \Phi(u_{x_0}, v_{x_0}; h_x(x)) - \frac{\Delta u}{x} \\ \qquad \qquad \qquad X(u_{x_0}, v_{x_0}; h_x(x)) - \frac{\Delta v}{x} \\ \qquad \qquad \qquad \Psi(u_{x_0}, v_{x_0}; h_x(x)) - \psi_{x_0}(x) + f_x \end{array} \right.$$

puis en faisant converger vers la limite zéro.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} dy \cdot \nabla u(t, y) v_i(y) + \int_0^t du \cdot \nabla u(t, u) v_i(u) = b - \Pi_{j \neq i} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} dy \cdot \nabla u(t, y) v_j(y).$$

la valeur de ds fournie par l'équation (9) et semblable à la valeur de du fournie par l'équation (8) de la façon précédente. La principale différence consiste n'est que les différentielles dx, dy, dz, \dots , comprises dans la valeur de ds sont des constantes arbitraires, tandis que les différentielles du, dv, dw, \dots , comprises dans la valeur de ds sont de nouvelles fonctions des variables indépendantes x, y, z, \dots , combinées d'une certaine manière avec les constantes arbitraires dx, dy, dz, \dots .

En appliquant la formule qui détermine la part de deux, on trouve

duo - o - o - du - du - du
duo - o - o - du - du - du
duo - o - o - du - du - du

Nous avions déjà obtenu ces équations pour la suspension. Il est donc supposé que u , v , w , ... sont des fonctions d'une variable indépendante x , mais on voit qu'elles doivent être quelques sortes de fonctions indépendantes.

Dans le cas particulier où l'on suppose la fonction de la variable variable x , v fonction de la seule variable x , on passe alors à l'ensemble

variable z_1, \dots , on peut arriver directement à l'équation (4), en partant de la formule (10) de la Leçon précédente. En effet, en vertu de cette formule, on aura généralement

$$(5) \quad ds = d_x s + d_y s + d_z s + \dots$$

De plus, comme parmi les quantités u, v, w, \dots la première est, par hypothèse, la seule qui renferme la variable x , en considérant s comme une fonction de fonction de cette variable et ayant égard à la formule (10) de la quatrième Leçon, on trouvera

$$d_x s = d_x \Phi(u, v, w, \dots) = \Phi(u, v, w, \dots) d_x u - \Phi(u, v, w, \dots) du.$$

On trouvera de même

$$d_y s = \Lambda(u, v, w, \dots) dv = d_y s = \Lambda(u, v, w, \dots) dv = \dots$$

Si l'on substitue ces valeurs de $d_x s, d_y s, d_z s, \dots$ dans la formule (5), elle coïncidera évidemment avec l'équation (4).

Soit maintenant r une seconde fonction des variables indépendantes x, y, z, \dots . Si l'on a identiquement, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques de ces variables,

$$(6) \quad s = r,$$

on en conclura

$$(7) \quad ds = dr.$$

Dans le cas particulier où la fonction r se réduit soit à zéro, soit à une constante c , on trouve

$$dr = 0,$$

et par suite l'équation

$$(8) \quad v - u = 0 = s - c$$

entraîne la suivante

$$(9) \quad ds = 0.$$

Les équations (7) et (9) sont du nombre de celles que l'on nomme

36. RESTAURÉ DES LECONS SUR LA CALCUL DIFFÉRENTIELLE. équations différentielles. La seconde peut être présentée sous la forme

$$(1) \quad \Phi(u_1, v_1, w_1) \cdot du + \sum_{i=2}^n u_i \cdot dv_i = 0 \quad \Phi(u_1, v_1, w_1) \neq 0$$

et substituée dans le cas même où quelques-unes des quantités u_1, v_1, w_1 seraient réduisées à quelques-unes des variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n . Ainsi, par exemple, on trouverait en supposant $v_1 = 0$,

$$\Phi(u_1, dx_1) + \sum_{i=2}^n u_i \cdot dx_i = 0$$

en supposant $\Phi(u_1, dx_1) = 0$,

$$\Phi(u_1, v_1, dx_1) + \sum_{i=2}^n u_i \cdot dv_i - \Phi(u_1, v_1, dx_1) \cdot v_1 = 0$$

etc.

Dans ces dernières équations, v_1 est évidemment une fonction implicite de la variable x_1 , ou une fonction implicite des variables x_1, x_2, \dots, x_n .

De même, si l'on admet que les variables x_1, x_2, \dots, x_n peuvent l'être indépendantes, soient bien entre elles, par une équation de la forme

$$(2) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

alors, en faisant usage des notations adoptées dans la leçon précédente, on obtiendra l'équation différentielle

$$(3) \quad x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \dots + x_n \cdot dx_n + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0$$

au moyen de laquelle on pourra déterminer la différentielle de l'une des variables considérées comme fonction implicite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, on trouverait en supposant $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

$$x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + x_3 \cdot dx_3 + \frac{x_1}{x} \cdot dx_1 = 0$$

en supposant $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

$$x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + x_3 \cdot dx_3 + \frac{r}{x} \cdot dr = 0$$

en supposant $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

$$x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz + a_x \cdot dx + \frac{x}{a} \cdot dx + \frac{y}{a} \cdot dy + \frac{z}{a} \cdot dz = 0$$

Comme on aura d'ailleurs, dans le premier cas,

$$y = \pm \sqrt{a^2 + x^2},$$

et dans le second,

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2},$$

on conclura des formules précédentes

$$(13) \quad d\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

ce qu'il est aisé de vérifier directement.

Torsqu'on désigne par u la fonction $f(x, y, z, \dots)$, les ´quations (11) et (12) peuvent s'écrire simplement comme il suit :

$$u - \alpha_1 = du - \alpha_1$$

Si les variables x, y, z, \dots au lieu d'être assujetties à une seule ´quation de la forme $u = \alpha_1$ ´taient liées entre elles par deux ´quations de cette espère, telles que

$$(14) \quad u - \alpha_1 = v - \alpha_2$$

alors on aurait en même temps les deux ´quations différentielles

$$(15) \quad du - \alpha_1 = dv - \alpha_2$$

  l'aide desquelles on pourrait déterminer les différentielles de deux variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

En général, si n variables x, y, z, \dots sont liées entre elles par m ´quations, telles que

$$(16) \quad u - \alpha_1 = v - \alpha_2 = w - \alpha_3 = \dots = 0$$

alors on aura en même temps les m ´quations différentielles

$$(17) \quad du - \alpha_1 = dv - \alpha_2 = dw - \alpha_3 = \dots = 0$$

  l'aide desquelles on pourra déterminer les différentielles de m variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

DIXIÈME LEÇON.

THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES. MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

On dit qu'une fonction de plusieurs variables est *homogène* lorsque, en faisant croître ou décroître toutes les variables dans un rapport donné, on obtient pour résultat la valeur primitive de la fonction multipliée par une puissance de ce rapport. L'exposant de cette puissance est le *degré de la fonction homogène*. En conséquence, $f(x, y, z, \dots)$ sera une fonction de x, y, z, \dots homogène et du degré a , si, si, à désignant une nouvelle variable, on a, quel que soit t ,

$$(1) \quad f(tx, ty, tz, \dots) = t^a f(x, y, z).$$

Noté posé, le *théorème des fonctions homogènes* peut s'énoncer comme il suit :

Théorème. — Si l'on multiplie les dérivées partielles d'une fonction homogène du degré a par les variables auxquelles elles se rapportent, la somme des produits ainsi formés sera équivalente à celui qu'on obtient en multipliant par a la fonction elle-même.

Démonstration. — Soient $u := f(x, y, z, \dots)$ la fonction donnée et $\varphi(x, y, z, \dots), \chi(x, y, z, \dots), \psi(x, y, z, \dots), \dots$ ses dérivées partielles par rapport à x , à y , à z , etc. Si l'on différentie les deux membres de l'équation (1), en y considérant t seule comme variable, on trouvera

$$\begin{aligned} & (\varphi(x, y, z, \dots)x + \chi(tx, ty, tz, \dots)y + \psi(tx, ty, tz, \dots)z)dt \\ & \qquad \qquad \qquad - u dt = 0. \end{aligned}$$

puis, en divisant par dt , et posant $t=1$,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x\varphi(x, y, z, \dots) + y\psi(x, y, z, \dots) + z\Phi(x, y, z, \dots) + \dots \\ \quad + u f(x, y, z, \dots), \end{array} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + \dots = au.$$

Corollaire. — Pour une fonction homogène d'un degré nul, on aura

$$(4) \quad x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + \dots = 0.$$

Exemples. — Appliquer le théorème aux fonctions $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ et $\frac{1}{y}$.

Lorsqu'une fonction réelle de plusieurs variables indépendantes x, y, z, \dots atteint une valeur particulière qui surpassé toutes les valeurs voisines, c'est-à-dire toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier x, y, z, \dots en plus ou en moins de quantités très petites, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière d'une fonction réelle de x, y, z, \dots est inférieure à toutes les valeurs voisines, elle prend le nom de *minimum*.

La recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables se ramène facilement à la recherche des maxima et minima des fonctions d'une seule variable. Supposons, en effet, que

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

devienne un maximum pour certaines valeurs particulières attribuées à x, y, z, \dots . On aura, pour ces valeurs particulières, et pour de très petites valeurs numériques de z ,

$$(5) \quad f(x + zh, y + zk, z + zt, \dots) < f(x, y, z, \dots),$$

quelles que soient d'ailleurs les constantes finies h, k, t, \dots , pourvu

celles qui vérifient l'équation (9), quelles que soient les constantes finies dx, dy, dz, \dots . Ces principes étant admis, il sera facile de résoudre la question suivante :

PROBLÈME. Trouver les maxima et minima d'une fonction de plusieurs variables.

Solution. Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ la fonction proposée. On cherchera d'abord les valeurs de x, y, z, \dots qui rendent la fonction u ou du discontinue, et parmi lesquelles on doit compter celles que l'on déduit de la formule

$$(10) \quad du = 0.$$

On cherchera, en second lieu, les valeurs de x, y, z, \dots qui vérifient l'équation (9), quelles que soient les constantes finies dx, dy, dz, \dots . Cette équation, pouvant être mise sous la forme

$$(11) \quad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots = 0,$$

entraine évidemment les suivantes

$$(12) \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \dots$$

dont on obtient la première en posant $dx = 1, dy = 0, dz = 0, \dots$, la seconde en posant $dx = 0, dy = 1, dz = 0, \dots$. Remarquons en passant que, le nombre des équations (12) étant égal à celui des inconnues x, y, z, \dots , on n'en déduira ordinairement pour ces inconnues qu'un nombre fini de valeurs.

Concevons à présent que l'on considère en particulier un des systèmes de valeurs que les précédentes recherches fournissent pour les variables x, y, z, \dots , et désignons par x_0, y_0, z_0, \dots les valeurs dont il se compose. La valeur correspondante de la fonction $f(x, y, z, \dots)$, savoir, $f(x_0, y_0, z_0, \dots)$, sera un maximum, si pour de très petites valeurs numériques de h , et pour des valeurs quelconques de k, l, \dots , la différence

$$(13) \quad f(x_0 + ah, y_0 + ak, z_0 + al, \dots) - f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

60 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

qu'elles aient été choisies de manière que le premier membre de la formule (5) reste réel. Or, si l'on fait, pour abréger,

$$(6) \quad f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots) = F(\alpha),$$

la formule (5) se trouvera réduite à la suivante :

$$(7) \quad F(\alpha) < F(0).$$

Celle-ci devant subsister, quel que soit le signe de α , il en résulte que, si α seule varie, $F(\alpha)$, considérée comme fonction de cette unique variable, deviendra toujours un maximum pour $\alpha = 0$.

On reconnaîtra de même que, si $f(x, y, z, \dots)$ devient un minimum pour certaines valeurs particulières attribuées à x, y, z, \dots , la valeur correspondante de $F(\alpha)$ sera toujours un minimum pour $\alpha = 0$.

Observons maintenant que, si les deux fonctions $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ sont l'une et l'autre continues par rapport à α , dans le voisinage de la valeur particulière $\alpha = 0$, cette valeur ne pourra fournir un maximum ou un minimum de la première fonction qu'autant qu'elle sera évanouir la seconde (*voir la sixième Leçon*), c'est-à-dire, qu'autant que l'on aura

$$(8) \quad F'(0) = 0.$$

D'ailleurs, lorsqu'on écrit dx, dy, dz, \dots au lieu de h, k, l, \dots , l'équation (8) prend la forme

$$(9) \quad du = 0$$

(*voir la huitième Leçon*). De plus, comme les fonctions $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$ sont ce que deviennent u et du quand on y remplace α par $\alpha = \alpha h$, y par $y + \alpha k$, z par $z + \alpha l$, ..., il est clair que, si ces deux fonctions sont discontinues par rapport à α , dans le voisinage de la valeur particulière $\alpha = 0$, les deux expressions u et du , considérées comme fonctions des variables x, y, z, \dots seront discontinues par rapport à ces variables dans le voisinage des valeurs particulières qui leur sont attribuées. En rapprochant ces remarques de ce qui a été dit plus haut, nous devons conclure que les seules valeurs de x, y, z, \dots propres à fournir des maxima ou des minima de la fonction u sont celles qui rendent les fonctions u et du discontinues, ou bien encore

celles qui vérifient l'équation (9), quelles que soient les constantes finies dx, dy, dz, \dots . Ces principes étant admis, il sera facile de résoudre la question suivante :

Problème. Trouver les maxima et minima d'une fonction de plusieurs variables.

Solution. Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ la fonction proposée. On cherchera d'abord les valeurs de x, y, z, \dots qui rendent la fonction u ou du discontinue, et parmi lesquelles on doit compter celles que l'on déduit de la formule

$$(10) \quad du = 0.$$

On cherchera, en second lieu, les valeurs de x, y, z, \dots qui vérifient l'équation (9), quelles que soient les constantes finies dx, dy, dz, \dots . Cette équation, pouvant être mise sous la forme

$$(11) \quad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots = 0,$$

entraine évidemment les suivantes

$$(12) \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \dots$$

dont on obtient la première en posant $dx = 1, dy = 0, dz = 0, \dots$, la seconde en posant $dx = 0, dy = 1, dz = 0, \dots$. Remarquons en passant que, le nombre des équations (12) étant égal à celui des inconnues x, y, z, \dots , on n'en déduira ordinairement pour ces inconnues qu'un nombre limité de valeurs.

Supposons à présent que l'on considère en particulier un des systèmes de valeurs que les précédentes recherches fournissent pour les variables x, y, z, \dots , et désignons par x_0, y_0, z_0, \dots les valeurs dont il se compose. La valeur correspondante de la fonction $f(x, y, z, \dots)$, savoir, $f(x_0, y_0, z_0, \dots)$, sera un maximum, si pour de très petites valeurs numériques de α , et pour des valeurs quelconques de h, k, l, \dots , la différence

$$(13) \quad f(x_0 + \alpha h, y_0 + \alpha k, z_0 + \alpha l, \dots) - f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

62 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

est constamment négative. Au contraire, $f(x_0, y_0, z_0, \dots)$ sera un minimum, si cette différence est constamment positive. Enfin, si cette différence passe du positif au négatif, tandis que l'on change un signe de α , ou les valeurs de h, k, l, \dots , $f(x_0, y_0, z_0, \dots)$ ne sera plus ni un maximum, ni un minimum.

Exemple. — La fonction $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ admet un maximum ou un minimum, lorsqu'on a $B^2 - 4AC < 0$, et n'en admet plus, lorsqu'on a $B^2 - 4AC > 0$.

Nota. — La nature de la fonction u peut être telle, qu'à une infinité de systèmes différents de valeurs attribuées à x, y, z, \dots correspondent des valeurs de u égales entre elles, mais supérieures ou inférieures à toutes les valeurs voisines, et dont chacune soit en conséquence une sorte de maximum ou de minimum. Lorsque cette circonstance a lieu pour des systèmes dans le voisinage desquels les fonctions u et du restent continues, ces systèmes vérifient certainement les équations (12). Ces équations peuvent donc quelquefois admettre une infinité de solutions. C'est ce qui arrive toujours quand elles se déduisent en partie les unes des autres.

Exemple. — Si l'on prend

$$u = (cy - bz + l)^2 + (az - cx + m)^2 + (bx - ay + n)^2,$$

les équations (12) donneront seulement

$$\frac{cy - bz + l}{a} = \frac{az - cx + m}{b} = \frac{bx - ay + n}{c},$$

et la fonction u admettra une infinité de valeurs égales à

$$\frac{(al + bm + cn)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

dont chacune pourra être considérée comme un minimum.



ONZIÈME LEÇON.

USAGE DES FACTEURS INDETERMINÉS DANS LA RECHERCHE DES MAXIMA ET MINIMA.

Soit

(1) $u = f(x, y, z, \dots)$

une fonction de n variables x, y, z, \dots . Mais concevons que ces variables, au lieu d'être indépendantes les unes des autres, comme on l'a supposé dans la dixième Leçon, soient liées entre elles par m équations de la forme

(2) $\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \dots$

Pour déduire de la méthode que nous avons indiquée les maxima et les minima de la fonction u , il faudrait commencer par éliminer de cette fonction m variables différentes à l'aide des formules (2). Après cette élimination, les variables qui resteraient, au nombre de $n - m$, devraient être considérées comme indépendantes, et il faudrait chercher les systèmes de valeurs de ces variables qui rentreraient la fonction u ou la fonction du discontinue ou bien encore ceux qui vérifieraient, quelles que fussent les différentielles de ces mêmes variables, l'équation

(3) $du = 0.$

Or la recherche des maxima et minima qui correspondent à l'équation (3) peut être simplifiée par les considérations suivantes.

Si l'on différentie la fonction u , en y conservant toutes les variables données x, y, z, \dots , l'équation (3) se présentera sous la forme

(4) $\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots = 0,$

64 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

et renfermera les n différentielles dx, dy, dz, \dots . Mais il importe d'observer que, parmi ces différentielles, les seules dont on pourra disposer arbitrairement seront celles des $n - m$ variables regardées comme indépendantes. Les autres différentielles se trouveront déterminées en fonction des premières et des variables elles-mêmes par les formules $d\nu = 0, d\omega = 0, \dots$, qui, lorsqu'on les développe, deviennent respectivement

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\nu}{dx} dx + \frac{d\nu}{dy} dy + \frac{d\nu}{dz} dz + \dots = 0, \\ \frac{d\omega}{dx} dx + \frac{d\omega}{dy} dy + \frac{d\omega}{dz} dz + \dots = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$

Cela posé, puisque l'équation (4) doit être vérifiée, quelles que soient les différentielles des variables indépendantes, il est clair que, si l'on élimine de cette équation un nombre m de différentielles à l'aide des formules (5), les coefficients des $n - m$ différentielles restantes devront être séparément égalés à zéro. Or, pour effectuer l'élimination, il suffit d'ajouter à l'équation (4) les formules (5) multipliées par des facteurs indéterminés, $-\lambda, -\mu, -\dots$, et de choisir ces facteurs de manière à faire disparaître dans l'équation résultante les coefficients de m différentielles successives. Comme d'ailleurs l'équation résultante sera de la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du}{dx} - \lambda \frac{d\nu}{dx} - \mu \frac{d\omega}{dx} - \dots \right) dx \\ + \left(\frac{du}{dy} - \lambda \frac{d\nu}{dy} - \mu \frac{d\omega}{dy} - \dots \right) dy + \dots = 0, \end{array} \right.$$

et que, après y avoir fait disparaître les coefficients de m différentielles, il faudra encore égaler à zéro ceux des différentielles restantes, il est permis de conclure que les valeurs de λ, μ, ν, \dots tirées de quelques-unes des formules

$$\frac{du}{dx} - \lambda \frac{d\nu}{dx} - \mu \frac{d\omega}{dx} - \dots = 0, \quad \frac{du}{dy} - \lambda \frac{d\nu}{dy} - \mu \frac{d\omega}{dy} - \dots = 0, \quad \dots$$

devront satisfaire à toutes les autres. Par conséquent, les valeurs de x_1, y_1, z_1, \dots propres à vérifier les formules (4) et (5) devront satisfaire aux équations de condition que fournit l'élimination des indéterminées λ, p_1, q_1, \dots entre les formules (7). Le nombre de ces équations de condition sera $n - m$. En les réunissant aux formules (2), on obtiendra en tout n équations, desquelles on déduira pour les variables données x_1, y_1, z_1, \dots plusieurs systèmes de valeurs, parmi lesquels se trouveront nécessairement ceux qui, sans rendre discontinue l'une des fonctions u et du , fourniront pour la première des maxima ou des minima.

Il est bon de retoquer que les équations de condition produites par l'élimination de λ, p_1, q_1 entre les formules (7) ne seraient altérées en aucune manière, si l'on échangeait dans ces formules la fonction u contre une des fonctions v, w, \dots . Par suite, on arriverait toujours aux mêmes équations de condition, si, au lieu de chercher les maxima et minima de la fonction u , en supposant $v = 0, w = 0, \dots$, on cherchait les maxima et minima de la fonction v , en supposant $u = 0, w = 0, \dots$, ou bien ceux de la fonction w , en supposant $u = 0, v = 0, \dots$. On pourrait même, sans altérer les équations de condition, remplacer les fonctions u, v, w, \dots par les suivantes : $u + a, v + b, w + c, \dots$, a, b, c, \dots désignant des constantes arbitraires.

Dans le cas particulier où l'on veut obtenir les maxima ou les minimum de la fonction u , en supposant x, y, z, \dots assujetties à une seule équation

$$(8) \quad u = 0,$$

les formules (7) deviennent

$$(9) \quad \frac{du}{dx} + \lambda \frac{de}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \lambda \frac{de}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} + \lambda \frac{de}{dz} = 0, \quad \dots$$

et l'on en conclut, par l'élimination de λ ,

$$(10) \quad \begin{array}{c} du \\ de \\ \hline dx \end{array} = \begin{array}{c} du \\ de \\ \hline dy \end{array} = \begin{array}{c} du \\ de \\ \hline dz \end{array} = \dots$$

66 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉMAL.

Cette dernière formule équivaut à $n - 1$ équations distinctes, lesquelles, réunies à l'équation (8), détermineront les valeurs cherchées de x, y, z, \dots .

Premier exemple. — Supposons que, a, b, c, \dots, r désignant des quantités constantes et x, y, z, \dots des variables assujetties à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = r^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + z^2 + \dots - r^2 = 0,$$

on demande le maximum et le minimum de la fonction

$$u = ax + by + cz + \dots$$

Dans cette hypothèse, la formule (10) se trouvant réduite à

$$(11) \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \dots$$

on en conclura (*voir l'Analyse algébrique*, Note II) (1)

$$\frac{ax + by + cz + \dots}{x^2 + y^2 + z^2 + \dots} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots}}$$

ou

$$\frac{u}{r^2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}}{r^2}$$

et, par conséquent,

$$(12) \quad u = \pm r \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}$$

Pour s'assurer que les deux valeurs de u données par l'équation (12) sont un maximum et un minimum, il suffit d'observer qu'on aura toujours

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ax + by + cz + \dots)^2 + (bx - ay)^2 \\ \quad + (cx - az)^2 + \dots + (cy - bz)^2 + \dots \\ \quad = (a^2 + b^2 + c^2 + \dots)(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \end{array} \right.$$

et, par suite,

$$u^2 < (a^2 + b^2 + c^2 + \dots) r^2,$$

à moins que les valeurs de x, y, z, \dots ne vérifient la formule (11).

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 360.

Deuxième exemple. — Supposons que a, b, c, \dots, k désignent des quantités constantes, et x, y, z, \dots des variables assujetties à l'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \dots = k,$$

on cherche le minimum de la fonction $u := x^2 + y^2 + z^2 + \dots$. Dans cette hypothèse, on obtiendra encore la formule (1), de laquelle on en déduira

$$\frac{k}{u} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}$$

et, par suite,

$$(14) \quad u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}$$

Si les variables x, y, z, \dots se réduisent à trois et désignent des coordonnées rectangulaires, la valeur de \sqrt{u} , donnée par l'équation (14), représentera évidemment la plus courte distance de l'origine à un plan fixe.

Troisième exemple. — Conservons que l'on cherche les demi-axes d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à son centre et représentée par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = R.$$

Chacun de ces demi-axes sera un maximum ou un minimum du rayon vecteur r , mené de l'origine à la courbe et déterminé par la formule

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Cela posé, comme on aura

$$dr = \frac{1}{r}(x dx + y dy),$$

on ne pourra faire évanouir dr qu'en supposant

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x dr + y dy = 0.$$

La première hypothèse ne peut être admise que pour une hyperbole.

68 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

En admettant la seconde, on tirera de la formule (10)

$$\frac{x}{Ax + By} = \frac{y}{Cy + Dx} = \frac{x^2 + y^2}{x(Ax + By) + y(Cy + Dx)} = \frac{r^2}{K},$$

$$\frac{K}{r^2} - A = B \frac{y}{x}, \quad \frac{K}{r^2} - C = D \frac{x}{y},$$

(15) $\left(\frac{K}{r^2} - A\right)\left(\frac{K}{r^2} - C\right) = B^2.$

Observons maintenant qu'à des valeurs réelles de r correspondront toujours des valeurs positives de r^2 , et que l'équation (15) fournira, pour r^2 , deux valeurs positives, si l'on a $AK > 0$, $AC - B^2 > 0$; une seule, si l'on a $AC - B^2 < 0$. Effectivement, la courbe, étant une ellipse dans le premier cas, aura deux axes réels; tandis que, dans le second cas, elle se changera en hyperbole et n'aura plus qu'un seul axe réel.

DOUZIÈME LEÇON.

DÉRIVÉES ET DÉRIVÉES DES DIFFÉRENTES ORDRES POUR LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDEPENDANTE.

Comme les fonctions d'une seule variable x ont ordinairement pour dérivées d'autres fonctions de cette variable, il est clair que d'une fonction donnée $y = f(x)$ on pourra déduire en général une multitude de fonctions nouvelles dont chacune sera la dérivée de la précédente. Ces fonctions nouvelles sont ce qu'on nomme les *dérivées des divers ordres* de y ou $f(x)$, et on les indique à l'aide des notations

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

$$(1) \quad f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots, f^{(n)}(x).$$

Cela posé, y' ou $f'(x)$ sera la dérivée du premier ordre de la fonction proposée $y = f(x)$; y'' ou $f''(x)$ sera la dérivée du second ordre de y , et en même temps la dérivée du premier ordre de y' , ...; enfin $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$ (n désignant un nombre entier quelconque) sera la dérivée de l'ordre n de y , et en même temps la dérivée du premier ordre de $y^{(n-1)}$.

Soit maintenant $dx = h$ la différentielle de la variable x supposée indépendante. On aura, d'après ce qu'on vient de dire,

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \quad dy = y' h, \quad dy' = y'' h, \quad dy''' = y''' h, \quad \dots, \quad dy^{(n)} = y^{(n)} h.$$

70 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

De plus, comme la différentielle d'une fonction de la variable x est une autre fonction de cette variable, rien n'empêche de différentier y plusieurs fois de suite. On obtiendra de cette manière les *dérivées successives* ou *dérivées des divers ordres* de la fonction y , savoir :

$$\begin{aligned} dy &= y' dx \\ d\ln y &= \frac{y'}{y} dx \\ dy &= y' dx \end{aligned}$$

Pour abrégier, on écrit simplement d^2y au lieu de ddy , d^3y au lieu de $ddd y$, ... ; en sorte que la différentielle du premier ordre est représentée par dy , la différentielle du second ordre par d^2y , celle du troisième ordre par d^3y , ... et généralement la différentielle de l'ordre n par $d^n y$. Ces conventions étant admises, on aura évidemment

et, par stile,

$$(4) \quad \begin{cases} y' = \frac{dy}{dx}, & x^n = \frac{d^ny}{dx^n}, & y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, & \dots, & y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}. \end{cases}$$

Il résulte de la dernière des formules (3) que la dérivée de l'ordre n , savoir $y^{(n)}$, est précisément le coefficient par lequel il faut multiplier la $n^{\text{ème}}$ puissance de la constante b — de pour obtenir la différentielle de l'ordre n . C'est pour cette raison que $y^{(n)}$ est quelquefois appeler le coefficient différentiel de l'ordre n .

Les méthodes par lesquelles on détermine les différentielles et les dérivées du premier ordre pour les fonctions d'une seule variable, servent également à calculer leurs différentielles et leurs dérivées des ordres supérieurs. Les calculs de cette espèce s'effectuent très facilement, ainsi qu'on va le montrer par des exemples.

Soit d'abord $y = \sin x$. Comme, en désignant par a une quantité constante, on a généralement

$$d\sin(x+a) = \cos(x+a)dx = \sin(x+a+\frac{1}{2}\pi)dx,$$

on en conclura

$$\begin{aligned} dy &= \sin(x+\frac{1}{2}\pi)dx, \\ d\sin(x+\frac{1}{2}\pi) &= \sin(x+\pi)dx, \\ d\sin(x+\pi) &= \sin(x+\frac{3}{2}\pi)dx, \\ &\dots \end{aligned}$$

et par suite on trouvera pour $y = \sin x$,

$$\begin{aligned} y^0 &= \sin(x+\frac{1}{2}\pi), \\ y^1 &= \sin(x+a), \\ y^2 &= \sin(x+\frac{3}{2}\pi), \\ &\dots \\ y^n &= \sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

En opérant de même, on trouvera encore pour $y = \cos x$,

$$\begin{aligned} y^0 &= \cos(x+\frac{1}{2}\pi), \\ y^1 &= \cos(x+a), \\ y^2 &= \cos(x+\frac{3}{2}\pi), \\ &\dots \\ y^n &= \cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right); \end{aligned}$$

pour $y = \Lambda^x$,

$$\begin{aligned} y^0 &= \Lambda^x(1\Lambda)_1, \\ y^1 &= \Lambda^x(1\Lambda)_2, \\ y^2 &= \Lambda^x(1\Lambda)_3, \\ &\dots \\ y^n &= \Lambda^x(1\Lambda)_n; \end{aligned}$$

pour $y = x^a$,

$$\begin{aligned} y^0 &= a.x^{a-1}, \\ y^1 &= a(a-1)x^{a-2}, \\ &\dots \\ y^n &= a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1).x^{a-n}. \end{aligned}$$

32. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

Il est essentiel d'observer que chaque des expressions est une π -fonction qui admet seulement quatre valeurs distinctes qui se répètent périodiquement et toujours dans le même ordre. Ces quatre valeurs, dont on obtient la première, la seconde, la troisième ou la quatrième, suivant que le nombre entier n divise par m donne pour reste $0, 1, 2, m-1$, sont respectivement égales à $\sqrt{m}, -\sqrt{m}, -\sqrt{m}$ et \sqrt{m} . C'est pour l'expression $\sin \frac{\pi}{m} x + \cos \frac{\pi}{m} x$ que nous avons fait, avec cette π -fonction, l'application la plus simple dans les fonctions $A = \mathbb{C}$. On remplace la lettre A par le nombre x qui sort de base des logarithmes népériens et la quantité a par le nombre m , on va constater que les dérivées successives de π sont toutes égales à zéro. Cela que, pour la fonction π^x , la dérivée de l'ordre n se réduit à la quantité constante π^{nx} , et les dérivées supérieures

En substituant les chiffres relatifs aux dérivés, on trouve des taux annuels que nous avons indiqués.

Journal of Management Education, Vol. 33, No. 5, May 2009
ISSN: 1052-5025 print / 1088-4564 online
DOI: 10.1177/1052502508325000
<http://jme.sagepub.com>

¹³ See also the discussion of the relationship between the two in the section on "Theoretical Implications."

10. *Leucania* *luteola* (Hufnagel) *luteola* Hufnagel

John C. H. Stoll

19. *Leucosia* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma*

$$g_0 \left(\frac{m_0}{m} \right)^{1/2} = - \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \approx - 0.436 \text{ GeV}^{-1}$$

For the first time, we have been able to measure the effect of the magnetic field on the energy gap in the superconducting state.

Chlorophyll a, chlorophyll b, carotenoids, and total chlorophyll were measured by spectrophotometry.

MENTAL PUNCTUATION

卷之三

1. 20. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.

卷之三

Exemples :

$$d^n((x+a)^n) = 1, n, 3, \dots, n \, dx^n, \quad d^n e^{ax} = a^n e^{ax} \, dx^n, \quad d^n \sin ax = \dots$$

Soient maintenant $y = f(x)$ et z deux fonctions de x liées par l'équation

$$(5) \qquad z := F(y).$$

En différentiant cette équation plusieurs fois de suite, on trouvera

$$(6) \quad \begin{cases} dz = F'(y) \, dy, \\ d^2z = F''(y) \, dy^2 + F'(y) \, d^2y, \\ d^3z = F'''(y) \, dy^3 + 3F''(y) \, dy \, d^2y + F'(y) \, d^3y, \\ \dots \end{cases}$$

Exemples :

$$d^n(a+x) = d^n x,$$

$$d^n(-y) = -d^n y,$$

$$d^n(ax) = a \, d^n y,$$

$$d^n(ae^x) = 1, n, 3, \dots, n \, a \, dx^n,$$

$$de^x = e^x \, dy,$$

$$d^2e^x = e^x(dy^2 + d^2y),$$

$$d^3e^x = e^x(dy^3 + 3dy \, d^2y + d^3y),$$

$$\dots$$

Si la variable x cessait d'être indépendante, l'équation

$$(7) \qquad y = f(x),$$

étant différentiée plusieurs fois de suite, donnerait naissance à de nouvelles formules parfaitement semblables aux équations (6), savoir :

$$(8) \quad \begin{cases} dy = f'(x) \, dx, \\ d^2y = f''(x) \, dx^2 + f'(x) \, d^2x, \\ d^3y = f'''(x) \, dx^3 + 3f''(x) \, dx \, d^2x + f'(x) \, d^3x, \\ \dots \end{cases}$$

74. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉMAL.

On tire de celles-ci

$$(9) \quad \begin{cases} f'(x) := \frac{dy}{dx}, \\ f''(x) := \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx}, \\ f'''(x) := \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2}, \\ \dots \end{cases}$$

Pour revenir au cas où x est variable indépendante, il suffirait de supposer la différentielle dx constante, et par suite $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, ... Alors les formules (9) deviendraient

$$(10) \quad f'(x) := \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) := \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) := \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots$$

c'est-à-dire qu'elles se réduiraient aux équations (4). De ces dernières, comparées aux équations (9), il résulte que, si l'on exprime les dérivées successives de $f(x)$ à l'aide des différentielles des variables x et $y = f(x)$, 1^e dans le cas où la variable x est supposée indépendante, 2^e dans le cas où elle cesse de l'être, la dérivée du premier ordre sera la seule dont l'expression reste la même dans les deux hypothèses. Ajoutons que, pour passer du premier cas au second, il faudra remplacer

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\text{ par } \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &\text{ par } \frac{dx (dx d^3y - dy d^3x) - 3 d^2x (dx d^2y - dy d^2x)}{dx^5}, \\ &\dots \end{aligned}$$

C'est par des substitutions de cette nature qu'on peut opérer un *changement de variable indépendante*.

Parmi les fonctions composées d'une seule variable, il en est dont les différentielles successives se présentent sous une forme très simple. Concevons, par exemple, que l'on désigne par u , v , w , ... diverses

fonctions de x . En différentiant n fois chacune des fonctions composées

$$u + v, \quad u - v, \quad u + cv, \quad au + bv + cw + \dots,$$

on trouvera

$$(1) \quad \begin{cases} d^n(u+v) &= d^n u + d^n v, \\ d^n(u-v) &= d^n u - d^n v, \\ d^n(u+cv) &= d^n u + d^n cv. \end{cases}$$

$$(2) \quad d^n(au + bv + cw + \dots) = ad^n u + bd^n v + cd^n w + \dots.$$

Il suit de la formule (1a) que la différentielle $d^m y$ de la fonction entière

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + px^2 + qx + r$$

se réduit, pour $n = m$, à la quantité constante $(1, 2, 3, \dots, m, adx^m)$, et pour $n > m$, à zéro.

TREIZIÈME LEÇON.

DÉPÉNDANTIELLES DES NIVEAUX ORDRES POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, \dots . Si l'on différentie cette fonction plusieurs fois de suite, soit par rapport à toutes les variables, soit par rapport à l'une d'elles seulement, on obtiendra plusieurs fonctions nouvelles dont chacune sera la dérivée totale ou partielle de la précédente. On pourrait même concevoir que les différentiations successives se rapportent tantôt à une variable, tantôt à une autre. Dans tous les cas, le résultat d'une, de deux, de trois, ... différentiations successivement effectuées, est ce qu'on appelle une *dépendante totale ou partielle* du premier, du second, du troisième, ..., ordre. Ainsi, par exemple, en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à toutes les variables, ou formera les différentielles totales $du, ddu, dd़u, \dots$ que l'on désigne, pour abréger, par les notations $d^n u, d^2 u, d^3 u, \dots$. Au contraire, en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à la variable x , on formera les différentielles partielles $d_x u, d_x^2 u, d_x^3 u, \dots$ que l'on désigne par les notations $d_x^n u, d_x^2 u, d_x^3 u, \dots$. En général, si n est un nombre entier quelconque, la différentielle totale de l'ordre n sera représentée par $d^n u$, et la différentielle du même ordre relative à une seule des variables x, y, z, \dots par $d_x^n u, d_y^n u, d_z^n u, \dots$. Si l'on différencierait deux ou plusieurs fois de suite par rapport à deux ou à plusieurs variables, on obtiendrait les différentielles partielles du second ordre ou des ordres supérieurs désignées par les notations $d_x d_y u, d_x d_z u, d_x d_w u, \dots, d_x d_y d_z u, \dots$. Or il est facile de voir que les différentielles de cette espèce conservent les mêmes valeurs quand on inter-

verit l'ordre suivant lequel les différentiations relatives aux diverses variables doivent être effectuées. On aura, par exemple,

$$(1) \quad d_x d_y u \cdots d_x d_n u.$$

C'est effectivement ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Concevons que l'on indique par la lettre α , placée au bas de la caractéristique Δ , l'accroissement que reçoit une fonction de x, y, z, \dots lorsqu'on fait croître x seule d'une quantité infiniment petite αdx . On trouvera

$$(2) \quad \Delta_x u = f(x + \alpha dx, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots), \quad d_x u = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\alpha},$$

$$(3) \quad \Delta_x d_y u = d_y(u + \Delta_x u) - d_y u = d_y \Delta_x u$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta_x d_y u}{z} = \frac{d_y \Delta_x u}{z} = d_y \frac{\Delta_x u}{z};$$

puis, en faisant converger α vers zéro, et ayant égard à la seconde des formules (2), on obtiendra l'équation (1). On établirait de la même manière les équations identiques $d_x d_z u \cdots d_z d_n u, d_y d_z u \cdots d_z d_n u, \dots$

Exemple. — Si l'on pose $u = \arctan \frac{x}{y}$, on trouvera

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} dx,$$

$$d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2} dy,$$

$$d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

L'équation (1) étant une fois démontrée, il en résulte que, dans une expression de la forme $d_x d_y d_z \cdots u$, il est toujours permis d'échanger entre elles les variables auxquelles se rapportent deux différentiations consécutives. Or il est clair qu'à l'aide d'un ou de plusieurs échanges de cette espèce on pourra intervertir de toutes les manières possibles l'ordre des différentiations. Ainsi, par exemple, pour déduire la diffé-

78 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

rentielle $d_x d_y d_z u$ de la différentielle $d_x d_y d_z u$, il suffira d'amener d'abord par deux échanges consécutifs la lettre x à la place de la lettre z , puis d'échanger ensuite les lettres y et z , afin de ramener la lettre y à la seconde place. On peut donc affirmer qu'une différentielle de la forme $d_x d_y d_z \dots u$ a une valeur indépendante de l'ordre suivant lequel sont effectuées les différentiations relatives aux diverses variables. Cette proposition subsiste dans le cas même où plusieurs différentiations se rapportent à l'une des variables, comme il arrive pour les différentielles $d_x d_y d_x u, d_x d_y d_x d_x u, \dots$. Lorsque cette circonstance se présente, et que deux ou plusieurs différentiations consécutives sont relatives à la variable x , on écrit, pour abréger, d_x^2 au lieu de $d_x d_x$, d_x^3 au lieu de $d_x d_x d_x, \dots$. Cela posé, on aura

$$d_x^2 d_y u = d_x d_y d_x u = d_y d_x^2 u,$$

$$d_x^2 d_y d_z u = d_x d_y d_x d_z d_x u = d_y d_x^2 d_z u = \dots,$$

$$d_x^2 d_y^2 u = d_y d_x^2 u, \dots$$

$$d_x d_y^2 d_z^2 u = d_x d_z^2 d_y^2 u = d_y^2 d_x d_z^2 u = \dots$$

et généralement, l, m, n, \dots étant des nombres entiers quelconques,

$$(4) \quad d_x^l d_y^m d_z^n \dots u = d_x^l d_z^m d_y^n \dots u = d_y^m d_x^l d_z^n \dots u = \dots$$

Comme, en différentiant une fonction des variables indépendantes x, y, z, \dots par rapport à l'une d'elles, on obtient pour résultat une nouvelle fonction de ces variables multipliée par la constante finie dx , ou dy , ou dz, \dots , et que, dans la différentiation d'un produit, les facteurs constants passent toujours en dehors de la caractéristique d , il est clair que, si l'on effectue l'une après l'autre, sur la fonction $u = f(x, y, z, \dots)$, l différentiations relatives à x , m différentiations relatives à y , n différentiations relatives à z, \dots , la différentielle qui sera de ces diverses opérations, savoir, $d_x^l d_y^m d_z^n \dots u$, sera le **nouvelle fonction de x, y, z, \dots par les facteurs dx, dy, dz, \dots** à la puissance l , le second à la puissance m , etc $n \dots$ La nouvelle fonction dont il s'agit ici

est ce qu'on nomme une *dérivée partielle de u, de l'ordre l+m+n+...*
Si on la désigne par $u(x, y, z, \dots)$, on aura

$$(5) \quad d_x^l d_y^m d_z^n \dots u = u(x, y, z, \dots) dx^l dy^m dz^n \dots$$

et, par suite,

$$(6) \quad u(x, y, z, \dots) = \frac{d_x^l d_y^m d_z^n \dots u}{dx^l dy^m dz^n \dots}$$

Il est facile d'exprimer les différentielles totales $d^1 u, d^2 u, \dots$ à l'aide des différentielles partielles de la fonction u ou de ses dérivées partielles. En effet, on tire de la formule (16) (huitième Léçon)

$$\begin{aligned} d^1 u &= d_x d u + d_y d u + d_z d u + \dots \\ &= d_x(d_x u + d_y u + d_z u + \dots) + d_y(d_x u + d_y u + d_z u + \dots) \\ &\quad + d_z(d_x u + d_y u + d_z u + \dots) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(7) \quad d^2 u = d_x^2 u + d_y^2 u + d_z^2 u + \dots + 2d_x d_y u + 2d_x d_z u + 2d_y d_z u + \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2 u = \frac{d_x^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d_y^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d_z^2 u}{dz^2} dz^2 + \dots \\ \quad + 2 \frac{d_x d_y u}{dx dy} dx dy + 2 \frac{d_x d_z u}{dx dz} dx dz + 2 \frac{d_y d_z u}{dy dz} dy dz + \dots \end{array} \right.$$

On obtiendrait avec la même facilité les valeurs de $d^3 u, d^4 u, \dots$

Exemples :

$$d^1(xy) = u(x dy dz + y dz dx + z dx dy),$$

$$d^2(xy) = 6 dx dy dz,$$

$$d^3(xy + y^2 + z^2 + \dots) = u(dx^2 + dy^2 + dz^2 + \dots),$$

$$d^4(xy + y^2 + z^2 + \dots) = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 + \dots),$$

.....

Pour abréger, on supprime ordinairement, dans les équations (6), (8), etc., les lettres que nous avons écrites au bas de la caracté-



Exemples :

$$d^n(u+v) = d^n u + d^n v,$$

$$d^n(u-v) = d^n u - d^n v,$$

$$d^n(u+cv^{\frac{1}{n-1}}) = d^n u + \sqrt[n]{c} d^n v,$$

$$d^n(au+bu+cv+\dots) = ad^n u + bd^n v + cd^n w + \dots$$

On obtiendrait encore avec la plus grande facilité les différentielles des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes. Il suffirait de différencier une ou plusieurs fois de suite les équations qui détermineraient ces mêmes fonctions, en considérant comme constantes les différentielles des variables indépendantes, et les autres différentielles comme de nouvelles fonctions de ces variables.

QUATORZIÈME RÉGION.

Ensuite, lorsque la somme des différences entre les positions polaires des points de la première et de la dernière étoile de l'arc est inférieure à celle des différences :

Soit toujours $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ les longueurs d'arcs entre deux étoiles consécutives indépendantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, et de plus si pour $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ on a $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \beta$, alors le rapport de deux étoiles consécutives de l'arc sera donné par la formule relative à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et β . Pour tout, comme dans la théorie de la con-

(1)
$$\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\beta_2 - \beta_3)} \cdots \frac{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}{\sin(\beta_{n-1} - \beta_n)} \cdot \frac{\sin(\alpha_n - \alpha_1)}{\sin(\beta_n - \beta_1)}$$

puisque l'on divise les deux termes consécutifs de l'équation (1) par rapport à la variable α_i , on trouve ce

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} &= \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\beta_2 - \beta_3)} \cdots \\ &\quad \frac{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}{\sin(\beta_{n-1} - \beta_n)} \cdot \frac{\sin(\alpha_n - \alpha_1)}{\sin(\beta_n - \beta_1)} \end{aligned}$$

Si, dans cette dernière fraction, on passe de α_i à $\alpha_i + \pi$, on obtient la suivante

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} &= \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\beta_2 - \beta_3)} \cdots \\ &\quad \frac{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}{\sin(\beta_{n-1} - \beta_n)} \cdot \frac{\sin(\alpha_n - \alpha_1)}{\sin(\beta_n - \beta_1)} \end{aligned}$$

laquelle s'accorde avec l'équation (2) pour la première étoile. De plus il résulte évidemment de la comparaison des deux équations (2) et (3) qu'en différenciant par rapport à α_i , alors que toutes les variables sont constantes, on obtient pour la première étoile une autre équation

$$(4) \quad \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\beta_2 - \beta_3)} \cdots$$

on obtient pour dériver une autre fonction de la transformation

nées d'une certaine manière avec les constantes dx , dy , dz , ... De nouvelles différentiations, relatives à la variable α , devront produire de nouvelles fonctions du même genre, nous sommes en droit de conclure que les expressions (4) seront les seules quantités variables renfermées, non seulement dans $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$, mais aussi dans $F''(\alpha)$, $F'''(\alpha)$, ..., et généralement dans $F^{(n)}(\alpha)$, n désignant un nombre entier quelconque. Par suite, les différences

$$F(x) = F(0), \quad F'(x) = F'(0), \quad F''(x) = F''(0), \quad \dots, \quad F^{(n)}(x) = F^{(n)}(0)$$

seront précisément égales aux accroissements que reçoivent les fonctions de x_1, x_2, x_3, \dots représentées par

$$F(v), \quad F'(v), \quad F''(v), \quad \dots, \quad F^{(n)}(v).$$

lorsqu'on attribue aux variables indépendantes les accroissements infinitésimales petits αdx , αdy , αdz , Cela posé, comme on a $F(0) = u$, on trouvera successivement, en faisant converger α vers la limite zéro,

$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta u} = df(u)/du$$

$$F'(n) = \lim_{x \rightarrow n} \frac{F(x) - F(n)}{x - n} = \lim_{x \rightarrow n} \frac{\Delta^3 u}{x - n} = dd^cu + d^3u$$

10. The following table shows the number of hours worked by 1000 employees in a company.

$$F^{(m)}(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F^{(m-1)}(u+\epsilon) - F^{(m-1)}(u)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta u^{(m-1)}(u+\epsilon) - \Delta u^{(m-1)}(u)}{\epsilon} = d u^{(m-1)}(u).$$

En résumé, l'on aura

$$(5) \quad \begin{cases} u = F(\alpha), & du = F'(\alpha), \quad d^2u = F''(\alpha), \\ \int_P u = F^*(\alpha), & \dots, \quad d^mu = F^{(m)}(\alpha). \end{cases}$$

Ainsi, pour former les différentielles totales du , d^2u , ..., $d^n u$, il suffira de calculer les valeurs particulières que requièrent les fonctions dérivées $F'(z)$, $F''(z)$, ..., $F^{(n)}(z)$, dans le cas où la variable z s'évaluera.

84. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

Parmi les méthodes propres à simplifier la recherche des différentielles totales, on doit encore distinguer celles qui s'appuient sur la considération des valeurs symboliques de ces différentielles.

En Analyse, on appelle *expression symbolique*, ou *symbol*, toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, on à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais à partir desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant un peu tout, selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. Dans le nombre des équations symboliques spécif est utile de connaître, on doit comprendre les équations imaginaires (voir l'*Analyse algébrique*, Chapitre VII) et celles que nous allons établir.

Si l'on désigne par a, b, c, \dots des quantités constantes et par $t, u, v, w, \dots, p, q, r, \dots$ des nombres réels, la différentielle totale de l'expression

$$(6) \quad ad_x d_y d_z \dots u - bd_x d_y d_z \dots u +$$

sera donnée par la formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} ad_x d_y d_z \dots u - bd_x d_y d_z \dots u + \\ ad_x d_y d_z \dots u - bd_x d_y d_z \dots u + \\ ad_x d_y d_z \dots u - bd_x d_y d_z \dots u + \\ ad_x d_y d_z \dots u - bd_x d_y d_z \dots u + \\ ad_x^2 d_y d_z \dots u + ad_x d_y^2 d_z \dots u + ad_x d_z^2 d_y \dots u + \\ + bd_x^2 d_y d_z \dots u + bd_x d_y^2 d_z \dots u + bd_x d_z^2 d_y \dots u \end{array} \right.$$

D'après la formule réunie à l'équation (5) de la troisième Leçon, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Pour obtenir la différentielle totale de l'expression $ad_x d_y d_z \dots$, multiplier par d le produit des deux facteurs

$$ad_x d_y d_z \dots - bd_x d_y d_z \dots +$$

et u , en supposant $d = d_x + d_y + d_z + \dots$, et opérant comme si les notations d , d_x , d_y , d_z , ... représentaient de véritables quantités distinctes les unes des autres, de développer le nouveau produit, en écrivant, dans les différents termes, les facteurs a , b , e , ... à la première place, et la lettre u à la dernière, puis de concevoir que, dans chaque terme, les notations d_x , d_y , d_z , ... cessent de représenter des quantités et reprennent leur signification primitive.

Exemples. — En déterminant, à l'aide de ce théorème, la différentielle totale de l'expression

$$(8) \quad d_x u + d_y u + d_z u + \dots,$$

on obtiendra précisément la valeur de ddu ou $d(d^2u)$, que fournit l'équation (7) de la Leçon précédente. En appliquant de nouveau le théorème à cette valeur de d^2u , on obtiendra celle de d^3u , et ainsi de suite.

Nota. — Lorsqu'on ne fait qu'indiquer les multiplications, à l'aide desquelles on peut, d'après le théorème, calculer la différentielle totale de l'expression (6), on obtient, au lieu de l'équation (7), la formule symbolique

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(a d_x^p d_y^m d_z^n \dots u + b d_x^p d_y^q d_z^r \dots u + \dots) \\ \quad = (a d_x^p d_y^m d_z^n \dots + b d_x^p d_y^q d_z^r \dots + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots) u. \end{array} \right.$$

Comme, dans la formule (9), les notations d_x , d_y , d_z , ... sont employées pour représenter des différentielles, cette formule, prise à la lettre, n'a aucun sens; mais elle redevient exacte, dès qu'on a développé son second membre à l'aide des règles ordinaires de la multiplication algébrique, et en opérant comme si d_x , d_y , d_z , ... étaient de véritables quantités.

Lorsqu'à l'expression (6) on substitue l'expression (8), et que l'on différentie cette dernière plusieurs fois de suite, on obtient par les mêmes procédés les valeurs symboliques des différentielles totales d^2u ,

86 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

$d^3 u, \dots$, savoir

$$(d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots) u,$$

$$(d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots) u,$$

.....

En joignant à ces valeurs symboliques celle de du , puis écrivant, pour abréger,

$$(d_x + d_y + d_z + \dots)^2$$

au lieu de

$$(d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots),$$

et

$$(d_x + d_y + d_z + \dots)^3$$

au lieu de

$$(d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots) (d_x + d_y + d_z + \dots),$$

etc., on formera les équations symboliques

$$(10) \quad \begin{cases} du = (d_x + d_y + d_z + \dots) u, \\ d^2 u = (d_x + d_y + d_z + \dots)^2 u, \\ d^3 u = (d_x + d_y + d_z + \dots)^3 u, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et l'on aura généralement, n désignant un nombre entier quelconqué,

$$(11) \quad d^n u = (d_x + d_y + d_z + \dots)^n u.$$

Soit maintenant

$$(12) \quad s = F(u, v, w, \dots),$$

u, v, w, \dots étant des fonctions des variables indépendantes x, y, z, \dots . On trouvera encore

$$(13) \quad d^n s = (d_x + d_y + d_z + \dots)^n s.$$

Il est très facile de développer le second membre de cette dernière équation, dans le cas particulier où l'on suppose u fonction de x seule, v de y seule, w fonction de z seule, etc. D'ailleurs, pour ce cas particulier au cas général, il suffira évidemment de

remplacer $d_x u, d_x^2 u, d_x^3 u, \dots$ par $du, d^2 u, d^3 u, \dots$; $d_y v, d_y^2 v, \dots$ par $dv, d^2 v, \dots$; c'est-à-dire d'effacer les lettres x, y, z, \dots placées au bas de la caractéristique d . Donc il sera facile, dans tous les cas, de tirer de la formule (43) la valeur de $d^n s$. Prenons, pour fixer les idées, $s = uv$. En opérant, comme on vient de le dire, on trouvera successivement

$$(44) \quad d^n(uv) = u d^n v + \frac{n}{1} d_x u d_x^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_x^2 u d_x^{n-2} v + \dots + \frac{n}{n} d_y v d_y^{n-1} u + v d_y^n u,$$

$$(45) \quad d^n(uv) = u d^n v + \frac{n}{1} d_x d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 u d^{n-2} v + \dots + \frac{n}{n} dv d^{n-1} u + v d^n u.$$

La dernière formule subsiste, quelles que soient les valeurs de u , v , en x, y, z , et dans le cas même où u, v se réduisent à deux fonctions de x, y .

Exemple:

$$\frac{d^{n-p+1}}{x^p} = \frac{d^n x^{p+1}}{x} \left\{ 1 - \frac{n}{n-p+1} \frac{n(n-1)}{n^2 x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3 x^3} - \dots - \frac{n(n-p+1)(n-p+2)\dots(p+1)}{n^p x^p} \right\} dx^p.$$

QUINZIÈME LEÇON.

RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE ET LEURS DÉRIVÉES
OU DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES, USAGE DE CES DIFFÉRENTIELLES DANS LA
RECHERCHE DES MAXIMA ET MINIMA.

Supposons que la fonction $f(x)$ s'évanouisse pour la valeur particulière x_0 de la variable x . Conservons de plus que cette même fonction et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre n , soient continues dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit, et que la continuité subsiste pour chacune d'elles entre les deux limites $x_0 + h_0$ et $x_0 + h$. L'équation (6) de la septième Leçon donnera

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0 + \theta h) - h f''(x_0 + \theta h),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité; ou, en d'autres termes,

$$(1) \quad f(x_0 + h) = h f'(x_0 + h_1),$$

h_1 désignant une quantité du même signe que h , mais d'une valeur numérique moindre. Si les fonctions dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ s'évanouissent à leur tour pour $x = x_0$, on trouvera encore

$$(2) \quad \begin{cases} f'(x_0 + h_1) & = h_1 f''(x_0 + h_2), \\ f''(x_0 + h_2) & = h_2 f'''(x_0 + h_3), \\ \dots & \dots \\ f^{(n-1)}(x_0 + h_{n-1}) & = h_{n-1} f^{(n)}(x_0 + h_n), \end{cases}$$

h_1 , h_2 , h_3 , ..., h_n représentant des quantités qui seront toutes du même signe, mais dont les valeurs numériques décroîtront de plus en plus. Des équations (2) réunies à l'équation (1), on déduira sans

peine

$$f(x_0 + h) = h h_1 h_2 \dots h_{n-1} f^{(n)}(x_0 + h_n),$$

dans laquelle h_n sera une quantité de même signe que h , et le produit $hh_1h_2\dots h_{n-1}$ une quantité de même signe que h^n . Ajoutons que les deux rapports $\frac{h_n}{h}$, $\frac{hh_1h_2\dots h_n}{h^n}$ seront des nombres évidemment compris entre les limites 0 et 1, de sorte qu'en désignant par 0 et 0 deux nombres de cette espèce, on pourra présenter l'équation (3) sous la forme

$$(4) \quad f(x_0 + h) - 0h^n f^{(n)}(x_0 + 0h),$$

Si l'on imagine que la quantité h devienne infiniment petite, la formule (4) subsistera toujours, et l'on trouvera, en remplaçant h au lieu de h_n ,

$$(5) \quad f(x_0 + i) - 0i^n f^{(n)}(x_0 + 0i).$$

De plus, comme, pour de très petites valeurs numériques de i , l'expression $f^{(n)}(x_0 + 0i)$ sera très peu différente de $f^{(n)}(x_0)$, on déduira immédiatement de l'équation (5) la proposition que je vais énoncer.

Théorème I. — *Supposons que la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre n , étant continues par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, s'évanouissent toutes, à l'exception de $f^{(n)}(x)$, pour cette même valeur. Alors, en désignant par i une quantité très peu différente de zéro, et posant $x = x_0 + i$, on obtiendra pour $f(x)$ une quantité affectée du même signe que le produit $i^n f^{(n)}(x_0)$.*

Il est aisé de vérifier ce théorème sur la fonction

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x),$$

Lorsque la fonction $f(x)$ cesse de s'évanouir pour $x = x_0$, le théorème I peut être remplacé par le suivant :

Théorème II. — *Supposons que les fonctions*

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x),$$

étant continues par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, s'évanouissent toutes, à l'exception de la première $f(x)$ et

90 - RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

de la dernière $f''(x)$, pour cette valeur. En désignant par ϵ une quantité très peu différente de zéro, on obtiendra pour la différence infiniment petite $f(x_n + \epsilon) - f(x_n)$ une valeur affectée du même signe que le produit $\epsilon^n f''(x_n)$.

Démonstration. — Pour déduire le théorème II du théorème I, il suffit de substituer à la fonction $f(x)$ la fonction $f(x) - f(x_n)$, qui a les mêmes dérivées que la première, et qui, de plus, s'annulant pour $x = x_n$. En vertu de la même substitution, l'équation (1) se trouvera remplacée par la suivante :

$$(6) \quad \frac{f(x_n + \epsilon) - f(x_n)}{\epsilon} - \Omega(\epsilon^m) = 0 \quad (\epsilon \neq 0).$$

Si maintenant on écrit x au lieu de x_n , et si l'on pose

$$t = x - x_n = \Delta x, \quad \epsilon = t - \Delta x,$$

l'équation (6) prendra la forme

$$(7) \quad \frac{\Delta x - \Omega(\Delta x^m)}{\Delta x} = 0 \quad (\Delta x \neq 0).$$

En désignant, aussi bien que Δx , une quantité infiniment petite. Toutefois il est essentiel d'observer que la formule (7) subsistera seulement pour la valeur particulière $x = x_n$.

Révolte. — Les mêmes choses étant admises que dans le théorème II, supposons qu'après avoir assigné à la variable x la valeur x_n on attribue à cette même variable un accroissement infiniment petit l'accroissement correspondant de la fonction $f(x)$ sera, si n est pair, un nombre pair, une quantité constamment affectée du même signe que la valeur de $f''(x)$ ou de $d^m y$, correspondante à $x = x_n + \Delta x$; au contraire, si n représente un nombre impair, l'accroissement de la fonction changera de signe avec celui de la variable.

Nous avons fait voir dans la sixième leçon que les valeurs de $f'(x)$ qui, sans rendre discontinue l'une des fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, donnaient pour la première des maxima ou des minima, étaient nécessairement des racines de l'équation

$$f'(x) = 0.$$

Or, à l'aide de ce qui précède, on pourra décider, en général, si une racine de l'équation (8) produit un maximum ou un minimum de $f(x)$. En effet, soient x_0 cette racine et $f^{(n)}(x)$ la première des dérivées de $f(x)$ qui ne s'évanouisse pas avec $f'(x)$, pour la valeur particulière $x = x_0$. Supposons de plus que, dans le voisinage de cette valeur particulière, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ soient toutes continues par rapport à x . Il suit évidemment du théorème II que $f(x_0)$ sera un maximum si, n étant un nombre pair, $f^{(n)}(x_0)$ a une valeur négative, et un minimum si, n étant un nombre pair, $f^{(n)}(x)$ a une valeur positive. Si n était un nombre impair, l'accroissement de la fonction changeant de signe avec celui de la variable, $f(x)$ ne serait plus ni un maximum ni un minimum. En observant d'ailleurs que les différentielles $d^1 f(x)$, $d^2 f(x)$, ... s'évanouissent toujours avec les fonctions dérivées $f(x)$, $f'(x)$, ... et que, pour des valeurs paires de n , $d^n f(x) - f^{(n)}(x) dx^n$ a le même signe que $f^{(n)}(x)$, on se trouvera naturellement conduit à la proposition suivante :

Théorème III. — *Soit $y = f(x)$ une fonction donnée de la variable x . Pour décider si une racine de l'équation $dy = 0$ produit un maximum ou un minimum de la fonction proposée, il suffira ordinairement de calculer les valeurs de $d^1 y$, $d^2 y$, $d^3 y$, ... correspondantes à cette racine. Si la valeur de $d^1 y$ est positive ou négative, la valeur de y sera un minimum dans le premier cas, un maximum dans le second. Si la valeur de $d^2 y$ se réduit à zéro, on devra chercher parmi les différentielles $d^3 y$, $d^4 y$, ... la première qui ne s'évanouira pas. Désignons celle-ci par $d^m y$. Si n est un nombre impair, la valeur de y ne sera ni un maximum ni un minimum. Si, au contraire, n est un nombre pair, la valeur de y sera un minimum, toutes les fois que la différentielle $d^m y$ sera positive, et un maximum, toutes les fois que la différentielle $d^m y$ sera négative.*

Nota. — Il faut admettre pour le théorème III, comme pour les deux premiers, que la fonction y et ses dérivées successives, jusqu'à

92 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

celle de l'ordre n , sont continues dans le voisinage de la valeur particulière attribuée à la variable x .

Si, au lieu de prendre pour y une fonction explicite de la variable x , on supposait la valeur de y en x donnée par une équation de la forme $u = 0$, le théorème III serait toujours applicable. Seulement, dans cette hypothèse, les valeurs successives de dy , d^2y , d^3y , ... devraient être déduites des équations différentielles

$$du = 0, \quad d^2u = 0, \quad d^3u = 0, \quad \dots$$

Exemple. — Soit

$$y = x^a e^{-x},$$

a désignant une quantité positive. On aura

$$ly = a \ln x - x.$$

En différentiant deux fois de suite la dernière équation, on trouvera

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{a}{x} - 1 \right) dx, \quad \frac{d^2y}{y} - \left(\frac{dy}{y} \right)^2 = -a \left(\frac{dx}{x} \right)^2;$$

puis, en posant $dy = 0$, et faisant abstraction de la valeur zéro que y ne peut recevoir,

$$(9) \quad 0 = \frac{a}{x} - 1, \quad \frac{d^2y}{y} = -a \left(\frac{dx}{x} \right)^2.$$

La valeur de d^2y donnée par la seconde des formules (9) étant négative, il en résulte que la valeur de x donnée par la première fournit un maximum de y .



SEIZIÈME LEÇON.

USAGE DES DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES DANS LA RECHERCHE DES MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ une fonction des variables indépendantes x, y, z, \dots , et posons, comme dans la dixième Leçon,

$$(1) \quad f(x + zdx, y + zd\gamma, z + zdz, \dots) = F(z).$$

Pour que la valeur de u relative à certaines valeurs particulières de x, y, z, \dots soit un maximum ou un minimum, il sera nécessaire et il suffira que la valeur correspondante de $F(z)$ devienne toujours un maximum ou un minimum, en vertu de la supposition $\alpha < 0$. On en conclut (voir la dixième Leçon) que les systèmes de valeurs de x, y, z, \dots qui sans rendre discontinue l'une des deux fonctions u et du , fournissoient pour la première des maxima ou des minima, vérifient nécessairement, quels que soient dx, dy, dz, \dots , l'équation

$$(2) \quad \frac{du}{dx} = 0,$$

et, par conséquent, les suivantes

$$(3) \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{d\gamma} = 0, \quad \dots$$

Suient x_0, y_0, z_0, \dots les valeurs particulières de x, y, z, \dots dont se compose un de ces systèmes. La valeur correspondante de $F(z)$ deviendra un maximum ou un minimum pour $z = z_0$, quelles que soient les différentielles dx, dy, dz, \dots , si, pour toutes les valeurs possibles de ces différentielles, la première des quantités $F'(0), F''(0), F'''(0), \dots$ qui ne sera pas nulle correspond à un indice pair et conserve tou-

96. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

jours le même signe (*voir la quinzième Leçon*). Ajoutons que $F(0)$ sera un maximum, si la quantité dont il s'agit est toujours négative, et un minimum, si elle est toujours positive. Lorsque celle des quantités $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, ..., qui cesse la première de s'évanouir, correspond à un indice impair, pour toutes les valeurs possibles de dx , dy , dz , ..., ou seulement pour des valeurs particulières de ces mêmes différentielles, ou bien encore, lorsque cette quantité est tantôt positive, tantôt négative, alors $F(0)$ ne peut plus être ni un maximum, ni un minimum. Si maintenant on a égard aux équations (3) de la quatorzième Leçon, savoir,

$$(3) \quad F(0) = u_0 - F'(0) = du_0 - F(0) = d^2 u_0 - \dots$$

on déduira des remarques que nous venons de faire la proposition suivante.

Théorème. — Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ une fonction donnée des variables indépendantes x, y, z, \dots , pour décider si un système de valeurs de x, y, z, \dots propre à vérifier les formules (3) produit un maximum ou un minimum de la fonction u , on calculera les valeurs de $d^2 u$, $d^3 u$, $d^4 u, \dots$ qui correspondent à ce système, et qui seront évidemment des polynômes dans lesquels il n'y aura plus d'arbitraire que les différentielles $dx = h, dy = k, dz = l, \dots$. Soit

$$(4) \quad d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^n} h^n + \frac{d^2 u}{dy^n} k^n + \dots + \frac{n}{(dx^{n-1})} \frac{d^2 u}{dx^{n-1} dy} h^{n-1} k + \dots$$

le premier de ces polynômes qui ne s'évanouira pas, n désignant un nombre entier qui pourra dépendre des valeurs attribuées aux différentielles h, k, l, \dots . Si, pour toutes les valeurs possibles de ces différentielles, n est un nombre pair, et $d^2 u$ une quantité positive, la valeur proposée de u sera un minimum. Elle sera un maximum, si, n étant toujours pair, $d^2 u$ reste toujours négative. Enfin, si le nombre n est quelquefois impair, ou si la différentielle $d^2 u$ est tantôt positive, tantôt négative, la valeur calculée de u ne sera ni un maximum, ni un minimum.

Nota. — Le théorème précédent subsiste, en vertu des principes

établis dans la quinzième Légion, toutes les fois que les fonctions $P(z)$, $P'(z), \dots, P^{(n)}(z)$ sont continues par rapport à z , dans le voisinage de la valeur particulière $z = 0$, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que $a, da, d^2a, \dots, d^n a$ sont continues, par rapport aux variables x_1, x_2, \dots , dans le voisinage des valeurs particulières attribuées à ces mêmes variables.

Corollaire I. — Conservons opte, pour appliquer le théorème, un forme d'abord la valeur de l'expression

$$(1) \quad d^3a - \frac{d^3a}{dx^3} h - \frac{d^3a}{dx^2 k} + \dots - \frac{d^3a}{dx dy} hk + \dots$$

en substituant les valeurs de x_1, x_2, \dots , tirées des formules (3) dans les fonctions dérivées $\frac{d^3a}{dx^3}, \frac{d^3a}{dx^2}, \dots, \frac{d^3a}{dx dy}, \dots$. On trouvera zéro pour résultat, si toutes ces dérivées s'évanouissent. Dans l'hypothèse contraire, d^3a sera une fonction homogène des quantités arbitraires h, k, l, \dots , et, si l'on fait alors varier ces quantités, il arrivera de trois choses: l'une: tout la différentielle d^3a conservera le même signe, sans jamais s'évanouir; ou elle s'évanouira pour certaines valeurs de h, k, l, \dots , et reprendra le même signe, toutes les fois qu'elle cesserai d'être nulle; ou elle sera toutôt positive et toutôt négative. La valeur proposée de a sera toujours un maximum ou un minimum dans le premier cas, quelquefois dans le second, jamais dans le troisième. Ajoutons que l'on obtiendra, dans le second cas, un maximum ou un minimum, si, pour chaque des systèmes de valeurs de h, k, l, \dots , propres à vérifier l'équation $d^3a = 0$, la première des différentielles d^3a, d^4a, \dots , qui ne s'évanouit pas est toujours d'ordre pair et affectée du même signe que celle des valeurs de d^3a qui diffèrent de zéro.

Corollaire II. — Si la substitution des valeurs attribuées à x_1, x_2, \dots , rendant a zero toutes les dérivées du second ordre, alors, da étant évidemment nulle, il ne pourrait y avoir ni maximum, ni minimum, à moins que la même substitution ne fit encore évanouir d^3a , en réduisant à zéro toutes les dérivées du troisième ordre.

96 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Corollaire III. — Si la substitution des valeurs attribuées à x, y, z, \dots , faisait évanouir toutes les dérivées du second ordre et du troisième, on aurait identiquement $d^2u = 0$, $d^3u = 0$, et il faudrait reconnaître à la première des différentielles $d^m u, d^{m+1} u, \dots$, qui ne serait pas identiquement nulle. Si cette différentielle était d'ordre impair, il n'y aurait ni maximum, ni minimum. Si elle était d'ordre pair, on de la forme

$$u = d^m u = \frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}} h^{(m+1)} + \frac{d^{m+1}u}{dy^{m+1}} k^{(m+1)} + \dots + \frac{d^{m+1}u}{dz^{m+1}} l^{(m+1)}$$

il pourrait arriver de trois choses. L'une : si la différentielle dont il s'agit conservait constamment le même signe, pendant que l'on faisait varier h, k, l, \dots , sans jamais s'évanouir ; on voit elle s'évanouirait pour certaines valeurs de h, k, l, \dots , et reprendrait le même signe, toutes les fois qu'elle cesserait d'être nulle ; ou elle serait toutôt positive, toutôt négative. La valeur proposée de u serait toujours un maximum ou un minimum dans le premier cas, quelquefois dans le second, jamais dans le troisième. De plus, afin de décider, dans le second cas, s'il y a maximum ou minimum, il faudrait pour chaque système de valeurs de h, k, l, \dots propres à vérifier l'équation $d^{m+1}u = 0$, chercher parmi les différentielles d'un ordre supérieur à $m+1$ celle qui la première cesse de s'évanouir, et voir si cette différentielle est toujours d'ordre pair et affectée du même signe que les valeurs de $d^{m+1}u$ qui diffèrent de zéro.

Il est essentiel d'observer que la valeur de $d^m u$ donnée par le formule (6), étant une fonction entière, et par conséquent continue des quantités h, k, l, \dots , ne saurait passer du positif au négatif, lorsque ces quantités varient, sans devenir nulle dans l'intervalle. Renvoiez en outre que, si la quantité u était une fonction implicite des variables x, y, z, \dots , ou si quelques-unes de ces variables devenaient des fonctions implicites de toutes les autres, chacune des quantités $d^m u, \dots$ se trouverait déterminée par le moyen d'une ou de plusieurs équations différentielles, en fonction des différentielles des indépendantes.

Exemple. — Supposons que, $a, b, c, \dots, k, p, q, r, \dots$ désignent des constantes positives, et x, y, z, \dots des variables assujetties à l'équation

$$ax + by + cz + \dots = k,$$

on cherche le maximum de la fonction $u = xy^qz^r, \dots$ on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= p \frac{dx}{x} + q \frac{dy}{y} + r \frac{dz}{z} + \dots \\ \frac{d^2u}{u^2} &= \left(\frac{du}{u} \right)^2 = p \left(\frac{dx}{x} \right)^2 + q \left(\frac{dy}{y} \right)^2 + r \left(\frac{dz}{z} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

et par suite on tirera de la formule (16) (onzième leçon)

$$\begin{aligned} \frac{p}{a} - \frac{q}{b} - \frac{r}{c} - \dots &= \frac{p}{a} - \frac{q}{b} - \frac{r}{c} + \dots, \\ \frac{p}{a} - \frac{p}{ap} - \frac{k}{b} - \frac{k}{c} - \dots &= \frac{p}{b} - \frac{q}{b} - \frac{k}{c} - \dots = z - \dots. \end{aligned}$$

Comme les valeurs précédentes de x, y, z, \dots rendront du constamment nulle et d^2u constamment négative, elles fourniront un maximum de la fonction u .

DIX-SEPTIÈME. LEÇON.

109. CONDITIONS QUI DOIVENT ÊTRE SATISFAITES POUR QUE UNE QUANTITÉ DONNÉE SE CHANGEMENT D'UNE FAÇON QU'ON VOUDE, SOIT ASSOCIÉ À UN CHANGEMENT D'UNE AUTRE QUANTITÉ ASSOCIÉE AU MÉME VECTEUR DES VARIABLES INDEPENDANTES.

D'après ce qu'on a vu dans les leçons précédentes, si l'on désigne par u une fonction des variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , et si l'on fait abstraction des valeurs de ces variables qui rendent des infinies l'une des fonctions u, du, d^2u, \dots , la fonction u ne pourra devenir un maximum ou un minimum que dans le voisinage d'un différentielles totales $d'u, d^2u, d^3u, \dots$, avec la première de celles qui ne seront pas constamment nulles, car lorsque le maximum apparaît pour toutes les valeurs possibles des quantités arbitraires x_1, x_2, \dots, x_n , $du = d^2u = \dots = d^n u = 0$, au moins pour les valeurs de ces quantités qui ne la réduisent pas à zéro. Ainsi que, dans le cas précédent, apparaissent alors un certain nombre de systèmes de valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n pour lesquelles la différentielle totale dont il s'agit devra échapper aux autres différentielles totales d'ordre pair en une quantité suffisante de rapports que conserve la première différentielle, tant qu'elle ne devient pas nulle. Toutefois, les différentielles $d'u, d^2u, d^3u, \dots$ ne devront pas pour des valeurs données de x_1, x_2, \dots, x_n , à des fois deux, trois, et brouillées, des quantités arbitraires k_1, k_2, k_3, \dots . De plus, on l'a appelée x_1, x_2, \dots , les rapports de la première, de la seconde, de la troisième de ces quantités, c'est à la dernière d'entre elles, la différentielle

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{d^2u}{dx_1^2} k_1^2 + \frac{d^2u}{dx_2^2} k_2^2 + \dots + \frac{d^2u}{dx_n^2} k_n^2 \\ \vdots \\ \frac{d^m u}{dx_1^m} k_1^m + \frac{d^m u}{dx_2^m} k_2^m + \dots + \frac{d^m u}{dx_n^m} k_n^m \end{array} \right.$$

sera évidemment affectée du même signe que la fonction entière de r , s , t , ..., à laquelle on parvient en divisant $d^m u$ par la puissance $2m$ de la dernière des quantités b , k , l , ..., c'est-à-dire du même signe que le polynôme:

$$(1) \quad \frac{d^m u}{dx^{2m}} t^{2m} + \frac{d^m u}{dy^{2m}} s^{2m} + \frac{d^m u}{dz^{2m}} l^{2m} + \dots + \frac{d^m u}{dr^{2m}} r^{2m} + \dots$$

En substituant un polynôme de cette espèce à chaque différentielle d'ordre pair, on reconnaîtra que la recherche des maxima et minima exige la solution des questions suivantes:

Problème 1. — Trouver les conditions qui doivent être remplies pour qu'une fonction entière des quantités r , s , t , ... ne change pas de signe, tandis que ces quantités varient.

Solution. — Soit $F(r, s, t, \dots)$ la fonction donnée, et supposons d'abord les quantités r , s , t , ... réduites à une seule r . Pour que la fonction $F(r)$ ne change jamais de signe, il sera nécessaire et il suffira que l'équation

$$(3) \quad F(r) = 0$$

n'ait pas de racines réelles simples, ni de racines réelles égales en nombre impair. En effet, si r_0 désignant une racine réelle de l'équation (3), m un nombre entier et R un polynôme non divisible par $r - r_0$, on ait

$$F(r) = (r - r_0)^m R \quad \text{ou} \quad F(r) = (r - r_0)^{2m+1} R$$

il est clair que, pour deux valeurs de r très peu différentes de r_0 , mais l'une plus grande et l'autre plus petite, la fonction $F(r)$ obtiendrait deux valeurs de signes contraires. De plus, comme une fonction continue de r ne saurait changer de signe, tandis que r varie entre deux limites données, sans devenir nulle dans l'intervalle, il est permis d'affirmer que, si l'équation (3) n'a pas de racines réelles, son premier membre conservera toujours le même signe, sans jamais s'être nul, et qu'il s'évanouira quelquefois sans jamais changer de signe.

100. RESTAURÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

S'il est le produit de plusieurs facteurs de la forme $(x - x_0)^m$ par un polynôme qui ne puisse se réduire à zéro, pour une même valeur réelle de x .

Revenons maintenant au cas où les quantités x, y, t, \dots sont en nombre quelconque. Alors, pour que la fonction $F(x, y, t, \dots)$ ne puisse changer de signe, il sera nécessaire et il suffira que l'équation

$$(4) \quad F(x, y, t, \dots) = 0,$$

résolue par rapport à x , ne fournit jamais de racines réelles simples, ni de racines réelles égales en nombre impair, quelles que soient d'ailleurs y, t, \dots .

Corollaire I. — La fonction $F(x)$ ou $F(x, y, t, \dots)$ conserve constamment le même signe lorsque l'équation (4) (ou (5)) n'a pas de racines réelles. (C'est, pour la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques, le XVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 117.)

Corollaire II. — Soit $u = f(x, y)$. La différentielle totale

$$(5) \quad du = \frac{dx}{dt} dx^2 + \frac{dy}{dt} dy^2 + \dots + \frac{du}{dx} dx$$

conservera constamment le même signe, si l'équation

$$(6) \quad \frac{dx^2}{dt^2} dx^2 + \frac{dy^2}{dt^2} dy^2 + \dots = 0$$

n'a pas de racines réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$(7) \quad \frac{dx^2}{dt^2} \frac{du}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx} \right)^2 > 0$$

même différentielle pourrait s'évanouir sans jamais changer de signe, lorsque la formule (5) se réduisait à zéro, les valeurs de signes opposés, si ce premier membre

Corollaire III. — Soit $u = f(x, y, z)$. La différentielle totale

$$(33) \quad d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} h^3 + \frac{d^3u}{dy^3} k^3 + \frac{d^3u}{dz^3} l^3 + 3 \frac{d^2u}{dx dy} hk + 3 \frac{d^2u}{dx dz} hl + 3 \frac{d^2u}{dy dz} kl$$

conservera constamment le même signe, si l'équation

$$(34) \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{d^3u}{dy^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{d^3u}{dz^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

réduite par rapport à x , n'a jamais de racines réelles, c'est-à-dire si l'on a quelle que soit y ,

$$(35) \quad \begin{cases} \left| \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dx dy} \right)^3 \right|^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \frac{d^3u}{dx^2} \frac{d^3u}{dy^2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^3u}{dx dy} \right)^3 > 0, \end{cases}$$

Cette dernière condition sera également satisfaite quand on aura

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dz^3} - \left(\frac{d^3u}{dx dz} \right)^3 > 0 \\ \text{et} \\ \left| \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dz^3} - \left(\frac{d^3u}{dx dz} \right)^3 \right| \left| \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dy dz} \right)^3 \right| \\ \qquad \qquad \qquad \left(\frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \frac{d^3u}{dy^2} \frac{d^3u}{dz^2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0, \end{cases}$$

Scalier. — Soit $u = f(r, x, y, z, \dots)$ une fonction de n variables indépendantes r, x, y, z, \dots et posons

$$(37) \quad \begin{cases} \text{F}(r, x, y, z, \dots) = \frac{d^3u}{dx^3} r^3 + \frac{d^3u}{dy^3} y^3 + \frac{d^3u}{dz^3} z^3 + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{d^2u}{dx dy} rx + \frac{d^2u}{dx dz} rt + \frac{d^2u}{dy dz} yt + \dots \end{cases}$$

La différentielle d^3u et la fonction $\text{F}(r, x, y, z, \dots)$ seront toujours afférentes du même signe que la quantité $\frac{d^3u}{dx^3}$, si le produit $\frac{d^3u}{dx^3} \text{F}(r, x, y, z, \dots)$ est toujours positif. Ce n'est évidemment ce qui aura lieu, si chaque

100. RÉSUMÉ DES RÉGIONS STABLES ET INSTABLES

Il est le produit de plusieurs facteurs de la forme $(x - x_0)^n$ pour un polymère qui ne présente pas de réticulation, pour une valeur négative.

Revenons maintenant au cas où les quantités x_1, x_2, t_1, t_2 sont des nombres quelconques. Alors, pour que la fonction $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ puisse changer de signe, il sera nécessaire d'ajouter que l'équation

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = 0$$

soit par rapport à x_1 , ou de tout autre façon de la manière suivante : nous devons trouver une équation tout autre chose, spécifiant que certaines relations entre x_1, x_2 ,

Condition 1. — Factorisez $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ en deux facteurs, dont au moins l'un sera de la forme $(x_1 - x_0)^n$. Ensuite, pour que la partie restante de l'équation soit déterminée par la condition 1, il faut que l'équation résultante de XVII (cette équation détermine x_1), soit satisfaisante pour x_1 .

Condition 2. — Si $x_1 = x_0$, la condition précédente devient

$$\text{soit} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2}$$

et cette condition est satisfaisante. Si dans cette équation, on lit également

$$\text{soit} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2}$$

et si dans cette équation également, on lit également

$$\text{soit} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2}$$

ou n'importe quelle autre $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ ou $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ ou $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}$ ou $\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2}$, et si dans cette équation, on lit également, alors la condition 2 sera remplie, et si dans cette équation, on lit également, alors la condition 2 sera remplie.

Corollaire III. — Soit $u = f(x, y, z)$. La différentielle totale

$$(3) \quad d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} h^3 + \frac{d^3u}{dy^3} k^3 + \frac{d^3u}{dz^3} p^3 + 3 \frac{d^3u}{dx dy} hk + 3 \frac{d^3u}{dx dz} hp + 3 \frac{d^3u}{dy dz} kp$$

conservera constamment le même signe, si l'équation

$$(4) \quad \frac{d^3u}{dr^3} r^3 + 3 \left(\frac{d^3u}{dx dy} s^3 + \frac{d^3u}{dr dz} \right) r + \frac{d^3u}{dy^3} s^3 + 3 \frac{d^3u}{dy dz} s^3 + \frac{d^3u}{dz^3} + o_3$$

ré solue par rapport à r , n'a jamais de racines réelles, c'est-à-dire si pour a_3 quelle que soit s ,

$$(5) \quad \begin{cases} \left| \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dr dz} \right)^2 \right| > 0 \\ \left| \frac{d^3u}{dr^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dx dy} \frac{d^3u}{dr dz} \right) s^3 + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dz^3} - \left(\frac{d^3u}{dy dz} \right)^2 \right| > 0 \end{cases}$$

Cette dernière condition sera elle-même satisfaite quand on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^3u}{dr^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dx dy} \right)^2 > 0 \\ \text{et} \\ \left| \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dr dz} \right)^2 \right| \left| \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dz^3} - \left(\frac{d^3u}{dy dz} \right)^2 \right| \\ \left(\frac{d^3u}{dr^3} \frac{d^3u}{dy^3} - \left(\frac{d^3u}{dx dy} \frac{d^3u}{dr dz} \right) s^3 + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{d^3u}{dz^3} - \left(\frac{d^3u}{dy dz} \right)^2 \right) > 0 \end{cases}$$

Série. — Soit $u = f(x, y, z, \dots)$ une fonction de n variables indépendantes x, y, z, \dots et posons

$$(7) \quad \begin{cases} F(r, s, t, \dots) = \frac{d^3u}{dx^3} r^3 + \frac{d^3u}{dy^3} s^3 + \frac{d^3u}{dz^3} t^3 + \dots \\ + 3 \frac{d^3u}{dx dy} rs^2 + 3 \frac{d^3u}{dx dz} rt^2 + 3 \frac{d^3u}{dy dz} st^2 + \dots \end{cases}$$

La différentielle d^3u et la fonction $F(r, s, t, \dots)$ seront toujours affectées du même signe que la quantité $\frac{d^3u}{dx^3}$, si le produit $\frac{d^3u}{dx^3} F(r, s, t, \dots)$ est toujours positif. Or c'est évidemment ce qui aura lieu, si chaque

102 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL

des produits.

$$(13) \quad \frac{d^3 u}{dx^3} \operatorname{F}(x, y) - \frac{d^3 u}{dy^3} \operatorname{F}(x, y) + \frac{d^3 u}{dx^2 dy} \operatorname{F}(x, y)$$

obtient pour valeur minimum une quantité positive. D'autre part, si l'on fait

$$\mathbf{D}_1 = \left(\frac{d^3 u}{dx^3} \right)^2, \quad \mathbf{D}_2 = \left(\frac{d^3 u}{dy^3} \right)^2, \quad \mathbf{D}_3 = \left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy} \right)^2,$$

et si généralement on désigne par \mathbf{D}_k le dénominateur commun des valeurs de h, k, L, \dots , tirées des équations (1) à l'*analyse algébrique*, par *Steiner*⁽¹⁾,

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^3 u}{dx^3} h - \frac{d^3 u}{dy^3} k + \frac{d^3 u}{dx^2 dy} L = 0, \\ \frac{d^3 u}{dx^2 dy} h - \frac{d^3 u}{dy^3} k + \frac{d^3 u}{dy^2 dx} L = 0, \\ \frac{d^3 u}{dy^3} h - \frac{d^3 u}{dx^3} k + \frac{d^3 u}{dx^2 dy} L = 0, \\ \frac{d^3 u}{dx^3} h - \frac{d^3 u}{dy^3} k + \frac{d^3 u}{dx^2 dy} L = 0, \end{cases}$$

on prouvera sans peine que les valeurs maxima ou minima des fonctions $\operatorname{F}(x)$, $\operatorname{F}(x, y)$, $\operatorname{F}(x, y, z)$, ... sont respectivement

$$(15) \quad \frac{\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3}{\mathbf{D}_1^2 - \mathbf{D}_2^2 - \mathbf{D}_3^2}, \quad \frac{\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3}{\mathbf{D}_1^2 + \mathbf{D}_2^2 + \mathbf{D}_3^2},$$

lorsque la différentielle $d^3 u$ conservera constamment le même signe, et les fractions (15), multipliées par \mathbf{D}_k , donneront des produits positifs ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \dots, \mathbf{D}_n$ sont affectées des mêmes signes que $\mathbf{D}_1^2, \mathbf{D}_2^2, \mathbf{D}_3^2, \dots, \mathbf{D}_n^2$.

Lorsqu'on suppose simplement u fonction de trois variables x, y, z , les conditions qu'on vient d'énoncer se réduisent aux deux suivantes: $\mathbf{D}_1 > 0$, $\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 > 0$, et coïncident avec celles que fournitont les équations (14).

PROBLÈME II. — *Etant donnée deux fonctions entières des variables x, y, t, \dots , trouver les conditions qui doivent être remplies pour que la*

(1) *Oeuvres de Steiner, t. II, p. 28.*

seconde fonction conserve son signe déterminé, toutes les fois que la première a échoué.

Solution — Soient

$$U(x_1, t_1) = 0$$

La première fonction est

$$W(x_1, x_2, t_1) = 0$$

La seconde. On éliminera t entre les deux équations

$$U(x_1, t_1) = 0 \quad \text{et} \quad W(x_1, x_2, t_1) = 0$$

L'équation résultante, étant résolue par rapport à t_1 , devra fournir pour cette quantité une valeur affectée du signe convenu, toutes les fois que l'on attribuera aux variables x_1, x_2 , des valeurs réelles auxquelles correspondra une valeur réelle de la variable t_1 .

DIX-HUITIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES D'UNE FONCTION QUADRATIQUE DE PUSIEUX. VARIATION D'UNE DIFFÉREN
TIELLE A SON TROISIÈME FONCTION LINÉAIRE D'UNES VARIABLES. COMPOSITION D'UNES
DIFFÉRENTIELLES DE FONCTIONS POLYNÔMES EN TROISIÈME DEGRÉS DE FONCTIONS
DE DEUXIÈME DEGRÉS.

Soient a, b, c, \dots, k des quantités constantes et

$$(1) \quad u = ax + by + cz + \dots + k$$

une fonction linéaire des variables indépendantes x, y, z, \dots . La différentielle

$$(2) \quad du = adx + bdy + cdz + \dots$$

sera elle-même une quantité constante, et par suite les différentielles d^2u, d^3u, \dots se réduiront toutes à zéro. On conclut immédiatement de cette remarque que les différentielles successives des fonctions $f(u), f(u, v), f(u, v, w, \dots)$ conservent le même terme, dans le cas où les variables u, v, w, \dots sont entières ou toutes indépendantes, et dans le cas où u, v, w, \dots sont des fonctions linéaires des variables indépendantes x, y, z, \dots . Ainsi on trouvera, dans les deux cas, pour $s > 0$ $f(u)$,

$$(3) \quad \begin{cases} dx = f'(u)du, \\ dy = f'(u)du, \\ dz = f''(u)du^2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ dw = f'''(u)du^3; \end{cases}$$

pour $s = f(u, v)$.

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} du_s &= \frac{d^n f(u, v)}{du^n} du^n + \frac{n}{n-1} \frac{d^n f(u, v)}{dn^{n-1} dv} dv^{n-1} dv + \dots \\ &\quad + \frac{n}{1} \frac{d^n f(u, v)}{du dv^{n-1}} du dv^{n-1} + \frac{d^n f(u, v)}{dv^n} dv^n \end{aligned} \right.$$

pair $s = f(u), f(v)$,

$$(b) \quad \begin{cases} d^n s = f^{(n)}(u) f(v) du^u dv^v + \frac{n}{1} f^{(n-1)}(u) f'(v) du^{u-1} dv^v + \dots \\ \quad + \frac{n}{1} f'(u) f^{(n-1)}(v) du^u dv^{v-1} + f(u) f^{(n)}(v) du^u, \end{cases}$$

$\psi(\cdot)$

Il est facile de s'assurer que, si l'on représente par $f(u)$, $f(v)$, $f(u+v)$, ... des fonctions entières des variables u , v , w , ..., les formules (3), (4), (5), ... subsisteront lors même que, u , v , w , ... étant fonctions linéaires de x , y , z , ..., les constantes a , b , c , ..., k , ... comprises dans u , v , w , ... deviendront imaginaires. On aura, par exemple, pour $s = f(u+y\sqrt{-1})$,

pour $s \in f(x - y\sqrt{-1})$.

pour $s \in \mathbb{R}$, $f(x + s y \sqrt{1-s^2}) f(x - s y \sqrt{1-s^2})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } n > 0, f^{(n)}(x + y\sqrt{-1})f'(x - y\sqrt{-1}) (dx + y\sqrt{-1}dy)^n \\ \quad + \sum_{k=1}^n f^{(n-k)}(x + y\sqrt{-1})f'(x - y\sqrt{-1}) (dx + y\sqrt{-1}dy)^{n-k-1} (dx - y\sqrt{-1}dy), \dots \\ \quad + \sum_{k=1}^n f^k(x + y\sqrt{-1})f^{(n-k)}(x - y\sqrt{-1}) (dx + y\sqrt{-1}dy) (dx - y\sqrt{-1}dy)^{n-k-1} \\ \quad + f(x + y\sqrt{-1})f^{(n)}(x - y\sqrt{-1}) (dx - y\sqrt{-1}dy)^n, \end{array} \right.$$

106 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

De cette dernière formule on déduira sans peine la proposition suivante : \square

Théorème 1. — Soit $f(x)$ une fonction réelle et entière de x . Si l'on pose

$$(g) \quad s = f(x + y\sqrt{-1})/f(x - y\sqrt{-1}).$$

on pourra toujours satisfaire par des valeurs réelles des variables x et y à l'équation

$$((\alpha)) \qquad \qquad \qquad A = \alpha_0$$

Démonstration. Soit n le degré de la fonction $f(x)$, en sorte qu'on ait

$$(1) \quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ désignent des constantes dont la première a_0 ne pourra s'évanouir. Comme nous de plus que les variables w, y soient supposées réelles, on représentera par r, p, R, R_1, R_2, \dots les modulus des expressions imaginaires.

$$f(x+xy') = 0, \quad f(x+xy) = 0, \quad f(x+2y) = 0, \quad \dots$$

et faisons, en conséquence,

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x + y\sqrt{-1} = r(\cos\tau + i\sin\tau), \\ dx + dy\sqrt{-1} = p(\cos\tau + i\sin\tau); \end{array} \right. \\
 & f(x + y\sqrt{-1}) = R(\cos T_1 + i\sin T_1), \\
 & f'(x + y\sqrt{-1}) = R_1(\cos T_1 + i\sin T_1), \\
 & f''(x + y\sqrt{-1}) = R_2(\cos T_1 + i\sin T_1), \\
 & \dots \\
 & f^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) = R_n(\cos T_1 + i\sin T_1);
 \end{aligned}$$

$t_1, \rho, R_1, R_{11}, R_{12}, \dots, R_n$ seront des quantités positives; $t_1 > 1$.

T_0, \dots, T_n des arcs réels, et l'on ait

$$(14) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$(15) \quad \begin{cases} s = R^2 = [a_0 r^n \cos nt + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)t + \dots + a_{n-1} r \cos t + a_n]^2 \\ \quad + [a_0 r^n \sin nt + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)t + \dots + a_{n-1} r \sin t]^2 \\ r^{2n} \left(a_0^2 + \frac{3a_0 a_1 \cos t}{r} + \frac{a_1^2}{r^2} + \frac{3a_0 a_2 \cos 2t}{r^2} + \dots \right). \end{cases}$$

Il résulte de ces dernières formules que la quantité s , qui représente une fonction entière, et par conséquent une fonction continue des variables x , y , restera toujours positive et croîtra indéfiniment si l'on attribue à ces deux variables ou seulement à l'une d'entre elles, et par suite au module r , des valeurs numériques de plus en plus grandes. On doit en conclure que la fonction s admettra un ou plusieurs minima correspondants à un ou plusieurs systèmes de valeurs finies des variables x et y . Considérons un de ces systèmes en particulier, et calculons les valeurs correspondantes des expressions

$$(16) \quad f'(x + y\sqrt{-1}), \quad f''(x + y\sqrt{-1}), \dots, \quad f^{(m)}(x + y\sqrt{-1}).$$

Quelques-unes de ces valeurs pourront s'évanouir, mais jamais elles ne seront nulles toutes à la fois, puisque l'expression $f^{(m)}(x + y\sqrt{-1})$, se réduisant avec $f^{(m)}(x)$, au produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_m$ à une valeur constante et différente de zéro. Cela posé, soit $f^{(m)}(x + y\sqrt{-1})$ la première des expressions (16) dont la valeur ne s'évanouira pas. Si l'expression $f(x + y\sqrt{-1})$ obtient elle-même une valeur différente de zéro, $d^m s$ sera, en vertu de la formule (8), la première des différentielles de s qui cesseront de s'évanouir. Au contraire, si l'on a

$$(17) \quad f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

la différentielle $d^m s$ deviendra nulle elle-même. Or je dis que ce dernier cas est seul admissible; car, dans le premier, on tirerait de la formule (8)

$$(18) \quad \begin{cases} d^m s = f^{(m)}(x + y\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1}) (dx + \sqrt{-1} dy)^m \\ \quad + f'(x + y\sqrt{-1}) f^{(m)}(x + y\sqrt{-1}) (dx + \sqrt{-1} dy)^m \\ \quad + i(10C_m p^m) \cos(T_m - T + m\pi). \end{cases}$$

108. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL

et par suite la différentielle $d^m x$, changeant de signe lorsqu'on remplacerait x par $x + \frac{\pi}{m}$, ne resterait pas toujours positive, quelle que fussent les quantités dx et dy , comme cela doit nécessairement arriver chaque fois que la fonction y devient un minimum. Donc toutes les valeurs réelles de valeurs de x et de y propres à fournir des minima de la fonction y vérifieront l'équation (17), qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$R(\cos T + X) - s(\sin T) = 0,$$

et de laquelle on tire

$$R - a_1 = s - R \sin T/a_1.$$

Donc la fonction y deviendra nulle pour des valeurs réelles et fixes des variables x et y toutes les fois qu'elle atteindra un des minima dont nous avons ci-dessus démontré l'existence.

Corollaire. — La fonction réelle $y = R^t$ ne pouvant s'évanouir qu'avec le module R , les fonctions imaginaires

$$R(\cos Ty - 1) - R(\cos T + y) - s(\sin T)$$

$$f(x - Ty - t) - R(\cos T - y) - s(\sin T)$$

s'évanouiront toujours en même temps qu'elle. Par conséquent, toutes les valeurs réelles de x et de y propres à vérifier l'équation (16) vérifieront aussi l'équation (17) et la suivante :

$$(18) \quad f(x - Ty - t) = 0.$$

A ces valeurs de x et de y correspondront des valeurs réelles de t et de τ propres à vérifier les deux équations

$$(19) \quad f(x \cos \tau + y \sin \tau) - 1 = 0, \quad f(x \cos \tau - y \sin \tau) - s = 0.$$

Dans le cas particulier où la valeur de y s'évanouit, les formules (17), (18) et (19) coïncident avec l'équation unique

$$(20) \quad f(x) = 0,$$

trouvé alors satisfait par une valeur réelle de x . De plus

remarques on déduit immédiatement la proposition que je vais énoncer.

Théorème II. — *Si $f(x)$ désigne une fonction réelle et entière de la variable x , on peut toujours satisfaire à l'équation (21), ou par des valeurs réelles de cette variable, ou par des valeurs imaginaires conjuguées deux à deux et de la forme*

$$(22) \quad x = r(\cos t + i\sin t), \quad x = r(\cos t - i\sin t),$$

Schol. — Si l'on appelle x_n une racine réelle ou imaginaire de l'équation (20), le polynôme $f(x)$ sera divisible par le facteur linéaire $x - x_n$. Donc, à deux racines imaginaires conjuguées et de la forme

$$x = r(\cos t + i\sin t), \quad x = r(\cos t - i\sin t),$$

correspondront les deux facteurs linéaires

$$x - r(\cos t + i\sin t) \quad \text{et} \quad x - r(\cos t - i\sin t),$$

lesquels seront encore conjugués l'un à l'autre et donneront pour produit un facteur réel du second degré, savoir

$$(x - r\cos t - ir\sin t)(x - r\cos t + ir\sin t) = x^2 - 2r\cos tx + r^2.$$

Cela posé, il résulte du théorème II que toute fonction réelle et entière de la variable x est divisible par un facteur réel du premier ou du second degré. La division étant effectuée, on obtiendra pour quotient une autre fonction réelle et entière qui sera elle-même divisible par un nouveau facteur. En continuant de la sorte, on finira par décomposer la fonction donnée, que j'appellerai $f(x)$, en facteurs réels du premier ou du second degré. En égalant ces facteurs à zéro, on déterminera les racines réelles ou imaginaires de l'équation (21), lesquelles seront en nombre égal au degré de la fonction. [Voir l'*Élément d'algèbre*, Chap. X (1)].

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

CRÉATION DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES DIFFÉRENTS ORDRES DANS LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN PIÈRES.

Il est facile de développer une fonction entière de x en un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de cette variable, quand on connaît les valeurs particulières de la fonction et de ses dérivées successives, pour $x = 0$. En effet, désignons par $F(x)$ la fonction donnée, par n le degré de cette fonction, et par $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, les coefficients inconnus des diverses puissances de x dans le développement cherché, en sorte qu'on ait

$$(1) \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

En différentiant n fois de suite l'équation (1), on trouvera

Si l'on pose, dans ces diverses formules, $x = u$, on en tirera

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = F(\alpha)_0 \\ a_1 = \frac{1}{1-a} F'(\alpha)_0 \\ a_2 = \frac{1}{(1-a)^2} F''(\alpha)_0 \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{(1-a)^n} F^{(n)}(\alpha)_0 \end{array} \right.$$

et l'équation (1) donnera

$$(4) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} F^{(n)}(0).$$

Exemple. — Soit $F(x) = (1+x)^n$; on obtiendra la formule comme

$$(5) \quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{n}{1} x^{n-1} + x^n.$$

Soit maintenant $f(x_1, y_1, z_1, \dots)$ une fonction entière des variables x_1, y_1, z_1, \dots , et n le degré de cette fonction, c'est-à-dire la plus grande somme qu'on puisse obtenir en ajoutant les exposants des diverses variables pris dans un même terme. Si l'on pose

$$F(x) = f(x_1, y_1, z_1) dx_1 + f(y_1, z_1) dy_1 + f(z_1) dz_1 + \dots$$

$F(x)$ sera une fonction entière de x_1 du degré n , et l'on aura en conséquence

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} F^{(n)}(0).$$

Cette dernière formule, en vertu des principes établis dans la quatorzième Légion, peut s'écrire comme il suit :

$$(6) \quad \int \left[f(x_1, y_1, z_1) dx_1 + f(y_1, z_1) dy_1 + f(z_1) dz_1 + \dots \right] = \\ - u + \frac{x}{1} du + \frac{x^2}{1 \cdot 2} d^2 u + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} d^n u.$$

Ajoutons qu'elle subsistera pour des valeurs quelconques de x_1 soit finies, soit infiniment petites. Si, pour plus de simplicité, on prend $x_1 = t$, on trouvera

$$(7) \quad \int \left[f(t, y_1, z_1) dt + f(y_1, z_1) dy_1 + f(z_1) dz_1 + \dots \right] = \\ - u + \frac{t}{1} du + \frac{t^2}{1 \cdot 2} d^2 u + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u + \dots + \frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} d^n u.$$

Dans le cas particulier où les variables x_1, y_1, z_1, \dots se réduisent à une

112. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

seule, on a

$$\begin{aligned} u &= f(x), \\ du &= f'(x) dx, \\ d^2u &= f''(x) dx^2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ d^n u &= f^{(n)}(x) dx^n, \end{aligned}$$

et l'on tire de la formule (7), en remplaçant dx par h ,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x). \end{array} \right.$$

Au reste, on aurait pu déduire directement cette dernière équation de la formule (4).

Exemple. — Si l'on suppose $f(x) = x^n$, on trouvera

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{n(n-1)}{3!} x^{n-3} h^3 + \cdots + \frac{n}{n!} x^{n-n} h^n. \end{array} \right.$$

Note. — Si $f(x)$ est divisible par $(x-a)^m$, on, en d'autres termes, si l'on a

$$(10) \quad f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière de la variable x , le développement de $f(a+h)$, suivant les puissances ascendantes de h , deviendra évidemment divisible par h^m . D'ailleurs ce développement sera, en vertu de ce qui précède,

$$f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + \cdots .$$

D'où l'équation (10) étant posée, on en conclura non seulement $f(a) = 0$, mais encore $f'(a) = 0$, ..., $f^{(m-1)}(a) = 0$. On obtient un même résultat en différentiant plusieurs fois de suite

L'équation (10), de laquelle on tirerait successivement, à l'aide de la formule (15) (Quatorzième leçon),

$$(10) \quad \begin{cases} f'(x) = (x - a)^m f(x) + m(x - a)^{m-1} \varphi(x), \\ f''(x) = (x - a)^m \varphi'(x) + 2m(x - a)^{m-2} \varphi(x) + m(m-1)(x - a)^{m-2} \varphi(x), \\ \dots \\ f^{(m-1)}(x) = (x - a)^m \varphi^{(m-1)}(x) + \dots + m(m-1)\dots 3\cdot 2\cdot (x - a) \varphi(x). \end{cases}$$

Ainsi, $f(x)$ étant une fonction entière de x , on peut affirmer que si l'équation

$$(11) \quad f(x) = 0$$

admet m racines égales représentées par a , chaque des équations dérivées

$$(12) \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad \dots, \quad f^{(m-1)}(x) = 0$$

se trouvera vérifiée par la supposition $x = a$. On doit même remarquer que, $f(x)$ étant divisible par $(x - a)^m$, $f'(x)$ sera divisible par $(x - a)^{m-1}$, $f''(x)$ par $(x - a)^{m-2}$, ..., et $f^{(m-1)}(x)$ par $x - a$ seulement. Quant à la fonction $f^{(m)}(x)$, comme elle sera déterminée par l'équation

$$(13) \quad \begin{cases} f^{(m)}(x) = (x - a)^m \varphi^{(m)}(x) + \frac{m}{1} m(x - a)^{m-1} \varphi^{(m-1)}(x) + \dots \\ \quad + \frac{m}{1} m(m-1)\dots 3\cdot 2\cdot (x - a) \varphi(x) + m(m-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \varphi(x), \end{cases}$$

elle se réduira, pour $x = a$, à

$$(14) \quad f^{(m)}(a) = 0, \quad 1\cdot 2\cdot \dots \cdot (m-1)m\cdot \varphi(a).$$

Toutes ces remarques subsisteraient dans le cas même où la valeur de $f(x)$ étant donnée par l'équation (10), $\varphi(x)$ vaudrait d'être une fonction entière de la variable x . On connaît d'ailleurs le parti qu'on peut tirer de ces remarques pour la détermination des racines égales des équations algébriques.

Considérons à présent que $y = F(x)$ et $z = f(x)$ désignent deux fonctions entières de x , divisibles l'une et l'autre par $(x - a)^m$. Si le

114. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

Si le nombre m surpassé l'unité, les valeurs des fractions $\frac{x}{x}$ et $\frac{d^m x}{dx^m} \frac{d^{m+1} x}{dx^{m+1}}$ pour $x = a$, se présenteront en même temps sous une forme indéterminée, et par conséquent on ne pourra plus se servir de la seconde fraction pour calculer la valeur de la première, comme nous l'avons expliqué dans la sixième leçon. Toutefois, la véritable valeur de la fraction $\frac{x}{x}$ ne verra pas d'être la limite vers laquelle convergent le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta x}$, tandis que les différences $\Delta y, \Delta z$ convergent vers zéro. D'ailleurs, en attribuant à x l'accroissement infinitement petit $\Delta x = adx$, on tirera de la formule (6)

$$\begin{aligned}\Delta y &= y + \frac{x}{1} dx + \frac{x^2}{1 \cdot 2} d^2 y + \dots + \frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} (m-1) d^{m-1} y \\&\quad + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} d^m y + \frac{x^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} d^{m+1} y + \dots \\ \Delta z &= z + \frac{x}{1} dz + \frac{x^2}{1 \cdot 2} d^2 z + \dots + \frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)} (m-1) d^{m-1} z \\&\quad + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} d^m z + \frac{x^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} d^{m+1} z + \dots\end{aligned}$$

Si maintenant on assigne à x la valeur particulière a , comme cette valeur sera évanouie les fonctions dérivées $y, y', \dots, y^{m-1}, y^m, y^m, z, z', \dots, z^{m-1}, z^m$ et, par conséquent, les différentielles $dy, dy', \dots, d^{m-1}y, dz, d^2z, \dots, d^{m-1}z$, on aura simplement

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} d^m y + \frac{x^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} d^{m+1} y + \dots \\&\quad + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \left(d^m y + \frac{x}{m-1} d^{m+1} y + \dots \right) \\ \Delta z &= \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} d^m z + \frac{x^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} d^{m+1} z + \dots \\&\quad + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \left(d^m z + \frac{x}{m-1} d^{m+1} z + \dots \right)\end{aligned}$$

On en conclura

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta y} &= \frac{d^m z + \frac{x}{m-1} d^{m+1} z + \dots}{d^m y + \frac{x}{m-1} d^{m+1} y + \dots} \\ \frac{\Delta y}{\Delta z} &= \frac{d^m y + \frac{x}{m-1} d^{m+1} y + \dots}{d^m z + \frac{x}{m-1} d^{m+1} z + \dots}\end{aligned}$$

puis, en faisant converger z vers la limite zéro,

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{d^m z}{d^m y} = \frac{z^{(m)}}{y^{(m)}}.$$

Donc la valeur que recevra la fraction donnée $\frac{z}{y}$ ou $\frac{f(x)}{F(x)}$, pour $x = a$, sera précisément égale à la valeur correspondante de la fraction

$$\frac{d^m z}{d^m y} = \frac{d^m}{d^m} \frac{f^{(m)}(x)}{F^{(m)}(x)}.$$

Exemple. — $\varphi(x)$ désignant une fonction entière non divisible par $x - a$, et $F(x)$ une autre fonction entière divisible par $(x - a)^m$, on aura, pour $x = a$,

$$\left) \begin{array}{l} (x - a)^m \varphi(x) = 1, 2, 3, \dots, m \varphi(x) + 0, 3, \dots, m(x - a) \varphi'(x) + \dots = 1, 2, 3, \dots, m \varphi(a), \\ \hline F(x) \end{array} \right. \quad \frac{(x - a)^m \varphi(x)}{F(x)} = \frac{1, 2, 3, \dots, m \varphi(a)}{F^{(m)}(a)}.$$

VINGTIÈME LEÇON.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Représentons par $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions entières de x , la première du degré m , la seconde du degré n . $\frac{f(x)}{F(x)}$ sera ce qu'on appelle une *fraction rationnelle*. De plus, l'équation

$$(1) \quad F(x) = 0$$

admettra n racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales; et si, en les supposant d'abord toutes inégales, on les désigne par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, il arrivera nécessairement

$$(2) \quad F(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n),$$

k étant le coefficient de x^n dans $F(x)$. Cela posé, on ait

$$(3) \quad g(x) = k(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) - \frac{f(x)}{F(x)} = \lambda_0.$$

L'équation (2) prendra la forme

$$(4) \quad F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

et, comme la différence

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \lambda_0 = \frac{f(x) - \lambda_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{F(x)}$$

s'évanouira pour $x = x_n$, il en sera de même du polynôme

$$f(x) - \lambda_0 g(x).$$

Donc ce polynôme sera divisible algébriquement par $x - x_n$; on saura

qu'au am

$$f(x) = \Lambda_n \varphi(x) - (x - x_0) \varphi'(x)$$

t t } 1

$$(5) \quad f(x) = A_0 \gamma(x) + (x - x_0) \gamma'(x),$$

$\gamma(x)$ représentant une nouvelle fonction entière de la variable x . Si maintenant on divise par $F(x)$ les deux membres de l'équation (5), en ayant regard à la formule (4), on trouvera

$$(6) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\Lambda_n}{x - x_n} + \frac{\gamma(x)}{(x - x_n)^2} - \frac{\Lambda_n}{(x - x_n)^2} + \frac{k(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x - x_n)^2},$$

On peut donc extraire de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{p(x)}$ une fraction simple de la forme $\frac{A_0}{x - x_n}$, A_0 désignant une constante, de manière à obtenir pour reste une autre fraction rationnelle dont le dénominateur soit ce que devient le polynôme $P(x)$ quand on supprime dans ce polynôme le facteur linéaire $x - x_n$. Concevons que, par une suite d'opérations semblables, on extrayé successivement de $\frac{f(x)}{p(x)}$, puis de $\frac{g(x)}{q(x)}$, ..., une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A_{k+1}}{t^{k+1} - t^k} = \frac{A_k}{t^k - t^{k-1}} + \cdots + \frac{A_0}{t^0 - t^{-1}}$$

de manière à faire disparaître l'un après l'autre, dans le dénominateur de la fraction restante, tous les facteurs linéaires du polynôme $F(x)$. La dernière de tous les restes sera une fraction rationnelle dont le dénominateur se trouvera réduit à la constante k , c'est-à-dire une fonction entière de la variable x . En désignant par Q cette fonction entière, on

$$(7) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\alpha-1}}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})} \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

Comme cette dernière formule entraîne la suivante

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = QF(x) + A_0 \frac{F(x)}{x - x_0} + A_1 \frac{F(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} \\ \quad + A_2 \frac{F(x)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} + \dots + A_{n-1} \frac{F(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})} \end{array} \right.$$

118. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

dans laquelle tous les termes qui suivent le produit $QF(x)$ sont des fonctions entières de x d'un degré inférieur à n , il est clair que la lettre Q représente le quotient de la division algébrique de $f(x)$ par $F(x)$. De plus, comme tous ces termes, à l'exception du premier, seront, ainsi que le produit $QF(x)$, divisibles par $x - x_n$, on aura évidemment, pour $x = x_n$,

$$(9) \quad f(x) = A_n \frac{F(x)}{x - x_n} + A_n \frac{dF(x)}{dx} = A_n F'(x).$$

Donc, pour déterminer la valeur de A_n , il suffira de poser $x = x_n$ dans la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$. En formant de même les valeurs de A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , on trouvera

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \\ A_0 = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}, \\ A_1 = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}, \\ A_2 = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)}, \\ \cdots \cdots \cdots \\ A_{n-1} = \frac{f(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}. \end{array} \right.$$

À l'inspection de ces valeurs, on reconnaît qu'elles sont indépendantes du mode de décomposition adopté. Ajoutons que la valeur de A_n , déduite de la formule (9), peut être indifféremment présentée sous l'une ou l'autre des deux formes $\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}$ et $\frac{A_n \cdot x_n}{x_n - x_0}$; il suit d'après ce que la première des formules (10) s'accorde avec la seconde des équations (3).

Lorsque les deux racines x_0, x_1 sont imaginaires et conjuguées, soit de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, alors, en désignant par A et B deux quantités réelles propres à vérifier l'équation

$$(11) \quad A + B\sqrt{-1} = \frac{f(x_0 + \beta\sqrt{-1})}{F'(x_0 + \beta\sqrt{-1})},$$

on voit que les fractions simples correspondantes à ces racines

sont respectivement

$$(13) \quad \frac{\Lambda - B\sqrt{-1}}{x - a + B\sqrt{-1}}, \quad \frac{\Lambda + B\sqrt{-1}}{x - a + B\sqrt{-1}}.$$

En ajoutant ces deux fractions, on obtient la suivante

$$(13) \quad \frac{\alpha\Lambda(x-a)+\beta\beta}{(x-a)^2+\beta^2},$$

qui a pour numérateur une fonction réelle et linéaire de x , et pour dénominateur un facteur du second degré du polynôme $F(x)$.

Exemple. — Découpage des fractions $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1^2} = \frac{x^m}{x^m+1^m}$.

Passons au cas où l'équation (1) a des racines égales. Alors, si l'on désigne par a, b, c, \dots les diverses racines, par p, q, r, \dots des nombres entiers, et par k un coefficient constant, le polynôme $F(x)$ sera de la forme

$$(14) \quad F(x) = k(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r \dots$$

Si, dans cette nouvelle hypothèse, on fait, pour abréger,

$$(15) \quad \varphi(x) = k(x-a)^p(x-b)^q \dots \text{ et } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Lambda,$$

l'équation (14) deviendra

$$(16) \quad F(x) = (x-a)^p \varphi(x);$$

et, comme les deux différences $\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \Lambda, f(x) - \Lambda \varphi(x)$ s'évanouissent pour $x = a$, on aura nécessairement

$$(17) \quad f(x) = \Lambda \varphi(x) + (x-a)\chi(x),$$

$\chi(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de la variable x . Cela posé, on tirera des équations (14), (16) et (17)

$$(18) \quad \begin{cases} f(x) = \Lambda \sqrt{(x-a)^{p-1}} (x-a)^{p-1} \varphi(x) \\ \quad + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{p-1} k(x-a)^{p-1} (x-b)^q (x-c)^r \dots} \end{cases}$$

Ainsi, en extrayant de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction simple de la forme $\frac{A}{(x-a)^p}$, on obtient pour reste une autre fraction rationnelle dont le dénominateur est ce que devient le polynôme $F(x)$ quand on supprime dans ce polynôme tous des facteurs égaux à $x-a$. Concevons qu'à l'aide de plusieurs décompositions semblables, on enlève successivement au dénominateur de la fraction restante : 1^e tous les facteurs égaux à $x-a$; 2^e tous les facteurs égaux à $x-b$; 3^e tous les facteurs égaux à $x-c$, etc. Le dernier de tous les restes sera une fraction rationnelle à dénominateur constant, c'est-à-dire une fonction entière de la variable x ; de sorte que, en divisant par Q cette fonction entière, et par $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{p-1}, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{q-1}, G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, \dots$ les numérateurs constants des diverses fractions simples, on aura

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = Q \cdot \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A_1}{(x-a)^{p-1}} + \dots \\ F(x) = \frac{A_p}{(x-a)^{p-1}} \cdot (x-b)^{q-1} \cdots (x-c)^{r-1} \end{array} \right.$$

Pour prouver : 1^e que le polynôme Q est le quotient de la division algébrique de $f(x)$ par $F(x)$; 2^e que les valeurs des constantes $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, B_1, \dots$ sont indépendantes du mode de décomposition adopté, il suffira d'observer que la formule (9) entraîne la suivante

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = QF(x) + A_p \frac{F(x)}{(x-a)^p} + A_1 \frac{F(x)}{(x-a)^{p-1}} + \dots \\ F(x) = A_p \frac{F(x)}{(x-a)^{p-1}} \cdot B_{q-1} \frac{F(x)}{(x-b)^{q-1}} \cdots \end{array} \right.$$

dans laquelle tous les termes qui suivent le produit $QF(x)$ sont des fonctions entières de x , d'un degré inférieur à celui de la fonction $F(x)$; et de plus, que, si dans la formule (10) on pose $x=a=x_0$, la comparaison des termes constants et des coefficients qui affecteront les puissances semblables de x , dans les deux membres développés suivant les puissances ascendantes de cette variable (voir la dernière

vième Léçon), fournira les équations

$$(21) \quad \begin{cases} f(a) = \lambda_{(1,2,3,\dots,p)} \frac{F^{(p)}(a)}{(1-a)^{p+1}}, \\ f'(a) = \lambda_{(1,2,3,\dots,(p+1))} + \lambda_{(1,2,3,\dots,p)} \frac{F^{(p)}(a)}{(1-a)^{p+2}}, \\ f''(a) = \dots \end{cases}$$

desquelles on déduira pour les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ un système unique de valeurs, savoir :

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\lambda_{(1,2,3,\dots,p)} f(a)}{F^{(p)}(a)}, \\ \lambda_2 = \frac{\lambda_{(1,2,3,\dots,(p+1))} f'(a) - \lambda_1 F^{(p+1)}(a)}{(p+1) F^{(p)}(a)}, \\ \dots \end{cases}$$

On obtiendrait de la même manière les valeurs de $B, B_1, B_2, \dots, C, C_1, C_2, \dots$. Il est essentiel d'observer que la première des formules (22) donne pour la constante λ_1 une valeur égale à celle que reçoit la fraction $\frac{(a-x)^p f(x) - f(x)}{F'(x)} = \frac{f(x)}{g'(x)}$, quand on y suppose $x = a$, et par conséquent égale à $\frac{f(a)}{g'(a)}$. [Voir, pour plus de détails, l'*Analyse algébrique*, Ch. XI c¹].

(1) *Théorie de Cauchy*, Sc. II, t. III, p. 360.

CALCUL INTÉGRAL.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES.

Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$, $x = X$, on désigne par x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$(1) \quad x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \dots, \quad X - x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'origine de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \quad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment : 1^o du nombre n des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $X - x_0$; 2^o des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Or il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites

et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est, effectivement, ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Si l'on supposait tous les éléments de la différence $X - x_n$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$(3) \quad S = (X - x_n) f(x_n).$$

Lorsque, au contraire, on prend les expressions (1) pour éléments de la différence $X - x_n$, la valeur de S , déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des éléments multipliée par une moyenne entre les coefficients

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1})$$

[voir, dans les préliminaires du *Cours d'Analyse*, le corollaire du théorème III (c)]. D'ailleurs, ces coefficients étant des valeurs particulières de l'expression

$$f(x_0 + \theta(X - x_n))$$

qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la septième Leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mêmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer le suivante

$$(4) \quad S = (X - x_n) f(x_0 + \theta(X - x_n)),$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.

Pour passer du mode de division que nous venons de considérer à un autre dans lequel les valeurs numériques des éléments de $X - x_n$ soient encore plus petites, il suffira de partager chacune des expressions (1) en de nouveaux éléments. Alors on devra remplacer, dans le second membre de l'équation (2), le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ par

(3) *Théorème de Cauchy*, §. II, I, III, p. 28.

124 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.
une somme de produits semblables, à laquelle on pourra substituer une expression de la forme

$$(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)],$$

θ_0 étant un nombre inférieur à l'unité, attendu qu'il y aura entre cette somme et le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ une relation pareille à celle qui existe entre les valeurs de S fournies par les équations (4) et (3). Par la même raison, on devra substituer au produit $(x_2 - x_1) f(x_1)$ une somme de termes qui pourra être présentée sous la forme

$$(x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

θ_1 désignant encore un nombre inférieur à l'unité. En continuant de la sorte, on finira par conclure que, dans le nouveau mode de division, la valeur de S sera de la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ \quad + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots \\ \quad + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{array} \right.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$\begin{aligned} f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] &= f(x_0) \pm \varepsilon_0, \\ f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] &= f(x_1) \pm \varepsilon_1, \\ &\dots \dots \dots \\ f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] &= f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}, \end{aligned}$$

on en tirera

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = (x_1 - x_0) [f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1) [f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots \\ \quad + (X - x_{n-1}) [f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \end{array} \right.$$

is, en développant les produits,

$$\left(\begin{array}{l} S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ \quad \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \end{array} \right)$$

autons que, si les éléments $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ ont

des valeurs numériques très petites, chacune des quantités ε_0 , ε_1 , ..., ε_{n-1} différera très peu de zéro, et par suite il en sera de même de la somme

$$\varepsilon_0(x_1 - x_0) + \varepsilon_1(x_2 - x_1) + \dots + \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

qui est équivalente au produit de $X - x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités. Cela posé, il résulte des équations (2) et (7) comparées entre elles qu'on n'altèrera pas sensiblement la valeur de S calculée pour un mode de division dans lequel les éléments de la différence $X - x_0$ ont des valeurs numériques très petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chaque de ces éléments se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Considérons à présent que l'on considère à la fois deux modes de division de la différence $X - x_0$, dans chaque desquels les éléments de cette différence aient de très petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi que chaque élément, soit du premier, soit du second mode se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de α_i interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0 , X , soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altérera très peu la valeur de S en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent en passant du premier au second. Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infinitésimement petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0 , X attribuées à la variable x . Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

Observons maintenant que, si l'on désigne par $\Delta x = h = dx$ un

126 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.
accroissement lui attribué à la variable x , les différents termes dont se compose la valeur S , tels que les produits

$$(x_1 - x_0)f(x_0), (x_2 - x_1)f(x_1), \dots$$

seront tous compris dans la formule générale

$$(84) \quad h f(x) = f(x) dx,$$

de laquelle on les déduira l'un après l'autre, en posant d'abord

$$x = x_n \quad \text{et} \quad h = x_1 - x_0$$

puis

$$x = x_1 \quad \text{et} \quad h = x_2 - x_1, \dots$$

On peut donc énoncer que la quantité S est une somme de produits semblables à l'expression (84), ce qu'on exprime quelquefois à l'aide de la caractéristique Σ , en écrivant

$$(85) \quad S = \Sigma h f(x) = \Sigma f(x) \Delta x.$$

Quant à l'intégrale définie vers laquelle converge la quantité S , tandis que les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infinitiment petits, on est convenu de la représenter par la notation $\int h f(x) dx$ ou $\int f(x) dx$, dans laquelle la lettre \int , substituée à la lettre Σ , indique non plus une somme de produits semblables à l'expression (84), mais la limite d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0 , X attribuées à la variable x , on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre \int , ou de la faire écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$(86) \quad \int_x^X f(x) dx, \quad \int f(x) dx \left[\begin{matrix} x_0 \\ X \end{matrix} \right], \quad \int f(x) dx \left[\begin{matrix} x \\ X \end{matrix} \right].$$

La première de ces notations, imaginée par M. Fourier, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par

une quantité constante a , on trouve, quel que soit le mode de division de la différence $X - x_0$,

$$S = a(X - x_0),$$

et l'on en conclut

$$(1) \quad \int_{x_0}^X a dx = a(X - x_0).$$

Si, dans cette dernière formule, on pose $a = 1$, on en tirera

$$(1') \quad \int_{x_0}^X dx = X - x_0.$$

VINGT-DEUXIEME LECON.

CONTRE-EXEMPLES D'INTEGRATION DE L'ESPACE FINI PAR MÉTHODE
DES INTEGRALES STOCHASTIQUES

D'après ce qui a été dit dans la dernière Léçon, si l'on donne $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un élément infiniment petit de \mathcal{X} , alors $\Delta X = x_i - x_{i-1}$ est une solution.

(1) Si $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, ..., $x_n = n$, alors $\Delta X = x_i - x_{i-1} = 1$ converge vers une limite lorsque passe par l'abscisse de division

$$(2) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta X_i$$

Des principes sur lequels reposent ces deux propriétés, il résulte qu'on peut déduire comme à la première fois de la théorie des intégrales ordinaires, toutes les propriétés de l'intégration semiadditive aux équations (1) et (2) (stabilité, etc.). Il convient d'ajouter ceci à l'indication que si l'on suppose

$$(3) \quad \begin{cases} S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R} & \text{et } x_1 = 0 \\ x_{i+1} = x_i + f(x_i) \Delta X_i & \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ \Delta X_i = x_{i+1} - x_i & \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

x_0, x_1, \dots, x_{n-1} désignant des nombres quelconques, alors l'égalité (2) tenu

$$(4) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta X_i$$

x_0, x_1, \dots, x_{n-1} désignant des nombres quelconques, alors l'égalité (3) tenu

precedentes se réduit à l'équation (3), lorsqu'on prend

$$x_0 = t_0, \quad x_1 = t_1, \quad \dots, \quad x_{n-1} = t_{n-1}$$

Si l'on fait au contraire,

$$x_0 = t_0, \quad x_1 = t_1, \quad \dots, \quad x_{n-1} = t_n$$

on trouve la

$$(4) \quad S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - (t_0 f(t_0) + \dots + (X - x_{n-1}) f(X))$$

Lorsque dans cette dernière formule, on échange entre elles les deux quantités x_i , X , ainsi que tous les termes placés à égales distances des deux extrêmes dans la suite $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, X$, on obtient une nouvelle valeur de S_n égale, mais opposée de signe, à celle qui fournit l'équation (3). Ensuite, si l'équation converge, cette nouvelle valeur deviendra donc égale, mais opposée de signe, à l'intégrale (2), si l'on appelle sur la droite par l'échange mutuel des deux quantités x_i , X . On arrivera ainsi à

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

On emploie fréquemment les intégrales (3) et (5) dans la recherche des valeurs approchées des intégrales définies. Pour plus de simplicité, on suppose généralement que les quantités $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X$ sont comprises dans $[a, b]$. L'exemple suit un procédé assez élémentaire. Alors les éléments de l'intervalle $[X - x_i, x_i]$ deviennent finalement à la fin de l'opération $\frac{X - x_i}{n}$. Si l'on décompose cette fraction par n , on trouve que les quotients successifs sont également des éléments intervalles :

$$\begin{aligned} (6) \quad & x_0 = x_0 + \frac{X - x_0}{n} = f(x_0) + \frac{f(X) - f(x_0)}{n} = f(X) - f(x_0) + f(X) \\ & x_1 = x_1 + \frac{X - x_1}{n} = f(x_1) + \frac{f(X) - f(x_1)}{n} = f(X) - f(x_1) + f(X) \end{aligned}$$

On peut alors exprimer à peu près toutes les quantités $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X$ par l'expression $f(X) - f(x_i) + f(X)$, où x_i est l'élément de l'intervalle $[X - x_i, x_i]$ pour lequel la valeur de f est la plus grande. Le résultat diffère très peu de l'exacte. On admettra cette hypothèse et posera $\left(\sum_{i=1}^n\right)^2 = 1 + \eta$, où

de l'exacte. En substituant cette hypothèse et tenant $\left(\sum_{i=1}^n\right)^2 = 1 + \eta$, où η sera dans l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n^2}$, on trouve deux nouvelles valeurs de S_n , dont la

130 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL

première sera

$$(9) \quad S = z \left\{ x_0 f(x_0) + x_0(x_1 - z)f(x_0(x_1 - z)) + \dots + \sum_{i=1}^{N-1} x_i f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}} z\right)\right\}.$$

Il est essentiel d'observer que, dans plusieurs cas, on peut déduire des équations (7) et (9), non seulement des valeurs approchées de l'intégrale (3), mais aussi sa valeur exacte ou $\lim S$. On trouvera, par exemple,

$$(10) \quad \int_{x_0}^X x^a dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(X - x_0)(X + x_0 - a)}{a} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X^2 - x_0^2 - X^2 + x_0^2}{a},$$

$$(11) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X x^a dx & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{i(X^a - X^{a+1})}{a+1} = \frac{X^a - X^{a+1}}{a+1}, \\ \int_{x_0}^X e^x dx & e^X - e^{x_0}. \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X x^a dx & \lim_{(c+a)^{a+1} \rightarrow 1} \frac{c(X^{a+1} - x_0^{a+1})}{(c+a)^{a+1}-1} = \frac{X^{a+1} - x_0^{a+1}}{a+1}, \\ \int_{x_0}^X dx & \lim_{a \rightarrow \infty} a x = \frac{X}{x_0}. \end{cases}$$

la dernière équation devant être restreinte au cas où les quantités x_0 , X sont affectées du même signe. Ajoutons qu'il est souvent facile de ramener la détermination d'une intégrale définie à celle d'une autre intégrale de même espèce. Ainsi, par exemple, on tirera de la formule (1)

$$(13) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X a q(x) dx & = \lim_{a \rightarrow 0} a [(x_1 - x_0)q(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})q(x_{n-1})] \\ & = a \int_{x_0}^X q(x) dx, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X f(x-a) dx & = \lim_{a \rightarrow 0} [(x_1 - x_0)f(x_0+a) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}+a)] \\ & = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x) dx,$$

$$(15) \quad \int_{x_0}^X f(x-a) dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x) dx, \quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{X-a} \frac{dx}{x} = \frac{X-a}{x_0-a},$$

la dernière équation devant être restreinte au cas où $x_0 = a$ et $X = a$ sont des quantités affectées du même signe. De plus, on tirera de la formule (8), en posant $x_0 = 0$ et remplaçant $f(x)$ par $f(X - x)$,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^X f(X - x) dx = \lim i [f(X - i) + f(X - 2i) + \dots + f(3i) + f(i) + f(0)] \\ \qquad \qquad \qquad - \int_a^X f(x) dx; \end{array} \right.$$

puis on en conclura, en ayant égard à l'équation (4),

$$(17) \quad \int_a^{X - x_0} f(X - x) dx = \int_a^{X - x_0} f(x + x_0) dx + \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Enfin, si dans la formule (9) on pose

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} e^{-\beta x} \quad \text{et} \quad \Gamma(1 + \alpha) = \beta,$$

on en tirera

$$(18) \quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x^\alpha} = \lim \beta \left(\frac{1}{1x_0} + \frac{1}{1x_0 + \beta} + \dots + \frac{1}{1X + \beta} \right) e^{\beta} \beta^{-1} \rightarrow \int_{x_0}^X \frac{dx}{x^\alpha} = \Gamma(\alpha)$$

les quantités x_0, X devant être positives et toutes deux supérieures ou toutes deux inférieures à l'unité.

Une remarque importante à faire, c'est que les formes sous lesquelles se présente la valeur de S , dans les équations (4) et (5) de la leçon précédente, conviennent également à l'intégrale (2). En effet, ces équations subsistant l'une et l'autre, tandis que l'on subdivise ou la différence $X - x_n$ ou les quantités $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_n$, en éléments infinitésimally petits, seront encore vraies à la limite, en sorte qu'on aura

$$(m) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

et

$$(m') \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^X f(x) dx = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ \qquad \qquad \qquad + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]; \end{array} \right.$$

182. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉMAL.

$0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ désignant des nombres inconnus, mais tous inférieurs à l'unité. Si, pour plus de simplicité, on suppose les quantités $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ égales entre elles, alors, en faisant $i = \frac{X - x_0}{n}$, on trouvera

$$(21) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = i[f(x_0 + \theta_0 i) + f(x_0 + i + \theta_1 i) + \dots + f(X - i + \theta_{n-1} i)].$$

Lorsque la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, le second membre de la formule (21) reste évidemment compris entre les deux valeurs de S fournies par les équations (7) et (8), valeurs dont la différence est $\pm i[f(X) - f(x_0)]$. Par conséquent, dans cette hypothèse, en prenant la demi-somme de ces deux valeurs, on l'expression

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{2}[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + f(X - n i) + f(X - i) + \frac{1}{2}f(X)] \end{array} \right.$$

pour valeur approchée de l'intégrale (21), on commet une erreur plus petite que la demi-différence $\pm i[\frac{1}{2}f(X) - \frac{1}{2}f(x_0)]$.

Exemple. — Si l'on suppose

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0, \quad X = 1, \quad i = \frac{1}{4},$$

l'expression (22) deviendra

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 0,78 \dots$$

En conséquence, 0,78 est la valeur approchée de l'intégrale $\int_{x_0}^X \frac{dx}{1+x^2}$.

L'erreur commise dans ce cas ne pourra surpasser $\frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{48}$. Elle sera effectivement au-dessous de $\frac{1}{100}$, comme nous le verrons plus tard.

Lorsque la fonction $f(x)$ est tantôt croissante et tantôt décroissante entre les limites $x = x_0, x = X$, l'erreur que l'on commet, en prenant une des valeurs de S fournies par les équations (7) et (8) pour valeur approchée de l'intégrale (2), est évidemment inférieure au produit de

$X - x_0$ par la plus grande valeur numérique que puisse obtenir la différence

$$(3) \quad f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

quand on y suppose x comprise entre les limites x_0 , X et Δx entre les limites 0 , i . Donc, si l'on appelle k la plus grande des valeurs numériques que reçoit $f(x)$, tandis que x varie depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, l'erreur commise sera certainement renfermée entre les limites

$$k i(X - x_0), \quad + k i(X - x_0).$$

DECOMPOSITION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE EN PLUSIEURS AUTRES, INTÉGRALES DÉFINIES IMAGINAIRES. PRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES INTÉGRALES DÉFINIES RÉELLES. DÉCOMPOSITION DE LA FONCTION SOUS LE SIGNE \int EN DEUX ÉLÉMENS DONT L'UN CONSERVE TOUJOURS LE MÊME SIGNE.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

DÉCOMPOSITION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE EN PLUSIEURS AUTRES, INTÉGRALES DÉFINIES IMAGINAIRES. PRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES INTÉGRALES DÉFINIES RÉELLES. DÉCOMPOSITION DE LA FONCTION SOUS LE SIGNE \int EN DEUX ÉLÉMENS DONT L'UN CONSERVE TOUJOURS LE MÊME SIGNE.

Pour diviser l'intégrale définie

$$(1) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx$$

en plusieurs autres de même espèce, il suffit de décomposer en plusieurs parties ou la fonction sous le signe \int , ou la différence $X - x_0$. Supposons d'abord

$$f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \dots$$

on en conclura

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_0) f(x_0) + \dots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ & (x_1 - x_0) \varphi(x_0) + \dots + (X - x_{n-1}) \varphi(x_{n-1}) \\ & + (x_1 - x_0) \chi(x_0) + \dots + (X - x_{n-1}) \chi(x_{n-1}) \\ & + (x_1 - x_0) \psi(x_0) + \dots + (X - x_{n-1}) \psi(x_{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

puis, en passant aux limites,

$$\int_{x_0}^X \varphi(x) dx + \int_{x_0}^X \chi(x) dx + \int_{x_0}^X \psi(x) dx + \dots$$

De cette dernière formule, jointe à l'équation (13) (vingt-deuxième Leçon), on tirera, en désignant par u, v, w, \dots diverses fonctions de

la variable x , et par a, b, c, \dots des quantités constantes

$$(2) \quad \int_{x_0}^X (u + v + w + \dots) dx = \int_{x_0}^X u dx + \int_{x_0}^X v dx + \int_{x_0}^X w dx + \dots,$$

$$(3) \quad \int_{x_0}^X (u - v) dx = \int_{x_0}^X u dx - \int_{x_0}^X v dx, \quad \int_{x_0}^X (u + v) dx = \int_{x_0}^X u dx + \int_{x_0}^X v dx,$$

$$(4) \quad \int_{x_0}^X (au + bv + cw + \dots) dx = a \int_{x_0}^X u dx + b \int_{x_0}^X v dx + c \int_{x_0}^X w dx + \dots$$

Lorsqu'on étend la définition que nous avons donnée de l'intégrale (1) au cas où la fonction $f(x)$ devient imaginaire, l'équation (4) subsiste pour des valeurs imaginaires des constantes a, b, c, \dots . On a, par suite,

$$(5) \quad \int_{x_0}^X (u + v\sqrt{-1}) dx = \int_{x_0}^X u dx + \sqrt{-1} \int_{x_0}^X v dx,$$

Supposons maintenant que, après avoir divisé la différence $X - x_0$ en un nombre fini d'éléments représentés par $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$, on partage chacun de ces éléments en plusieurs autres dont les valeurs numériques soient infinitésimales, et que l'on modifie en conséquence la valeur de S fournie par l'équation (1) (vingt-deuxième Légion). Le produit $(x_i - x_0)f(x_0)$ se trouvera remplacé par une somme de produits semblables qui aura pour limite l'intégrale $\int_{x_0}^X f(x) dx$. De même, les produits $(x_2 - x_1)f(x_1), \dots, (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ seront remplacés par des sommes qui auront pour limites respectives les intégrales définies $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \dots, \int_{x_{n-1}}^X f(x) dx$. D'ailleurs, en réunissant les différentes sommes dont il s'agit, on obtiendra pour résultat une somme totale dont la limite sera précisément l'intégrale (1). Donc, puisque la limite d'une somme de plusieurs quantités est toujours équivalente à la somme de leurs limites, on aura généralement

$$(6) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^X f(x) dx.$$

136 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Il est essentiel de se rappeler que l'on doit ici attribuer au nombre entier n une valeur finie. Lorsqu'entre les limites x_0, X on interpose une seule valeur de x représentée par ξ , l'équation (6) se réduit à

$$(7) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^X f(x) dx.$$

Il est facile de prouver que les équations (6) et (7) subsisteraient dans le cas même où quelques-unes des quantités $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi$ cesseraient d'être comprises entre les limites x_0, X , et dans celui où les différences $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}, \xi - x_0, X - \xi$ ne seraient plus des quantités de même signe. Admettons, par exemple, que les différences $\xi - x_0, X - \xi$ soient de signes contraires. Alors, suivant qu'on supposera x_0 comprise entre ξ et X , ou bien X comprise entre x_0 et ξ , on trouvera

$$\int_{\xi}^X f(x) dx = \int_{\xi}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^X f(x) dx$$

ou bien

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x) dx = \int_{x_0}^X f(x) dx + \int_X^{\xi} f(x) dx.$$

Or, la formule (6) de la vingt-deuxième Leçon suffit pour montrer comment les deux équations que nous venons d'obtenir s'accordent avec l'équation (7). Cette dernière étant établie dans toutes les hypothèses, on pourra en déduire directement l'équation (6), quelles que soient x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

On a vu, dans la Leçon précédente, combien il était aisément de trouver, non seulement des valeurs approchées de l'intégrale (1), mais aussi toutes les limites des erreurs commises, lorsque la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$. Quand cette condition cesse d'être satisfaite, on peut évidemment, à l'aide de la formule (6), décomposer l'intégrale (1) en plusieurs autres, pour chacune desquelles la même condition soit rem-

placée, à présent que, la limite X étant supérieure à x_0 , et la

fonction $f(x)$ étant positive depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, où y désignent des coordonnées rectangulaires, et à la surface comprise d'une part entre l'axe des x et la courbe $y = f(x)$, d'autre part entre les ordonnées $f(x_0), f(X)$. Cette surface, qui a pour base la longueur $X - x_0$ comptée sur l'axe des x , sera une moyenne entre les aires des deux rectangles construits sur la base $X - x_0$, avec des hautes respectivement égales à la plus petite et à la plus grande des ordonnées élevées par les différents points de cette base. Elle sera donc équivalente à un rectangle construit sur une ordonnée moyenne représentée par une expression de la forme $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; en sorte qu'on aura

$$(10) \quad A = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Si l'on divise la base $X - x_0$ en éléments très petits, $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$, la surface A se trouvera divisée en éléments correspondants dont les valeurs seront données par des équations semblables à la formule (8). On aura donc encore

$$(9) \quad \begin{cases} A = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots \\ \quad + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] \end{cases}$$

$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ désignant des nombres inférieurs à l'unité. Si dans cette dernière équation on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques des éléments de $X - x_0$, on en tirera, en passant aux limites,

$$(10) \quad A = \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Exemples. — Appliquer la formule (10) aux courbes $y = ax^3$, $ay = 1$, $y = e^x$.

En terminant cette leçon, nous allons faire connaître une propriété remarquable des intégrales définies réelles. Si l'on suppose $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions nulles qui restent l'une et l'autre continues entre les limites $x = x_0, x = X$, et

138. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

dont la seconde conserve toujours le même signe entre ces limites, la valeur de S donnée par l'équation (1) de la vingt-deuxième leçon deviendra

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = (x_1 - x_n) \varphi(x_n) \chi(x_n) \\ \quad + (x_n - x_1) \varphi(x_1) \chi(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) \varphi(x_{n-1}) \chi(x_{n-1}), \end{array} \right.$$

et sera équivalente à la somme

$$(x_1 - x_n) \chi(x_n) + (x_2 - x_1) \chi(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) \chi(x_{n-1})$$

multipliée par une moyenne entre les coefficients $\varphi(x_n)$, $\varphi(x_1)$, ..., $\varphi(x_{n-1})$, ou, ce qui revient au même, par une quantité de la forme $\varphi(\xi)$, ξ désignant une valeur de x comprise entre x_n et X . On aura donc

$$(2) \quad S = [(x_1 - x_n) \chi(x_n) + (x_2 - x_1) \chi(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) \chi(x_{n-1})] \varphi(\xi),$$

et l'on en conclura, en cherchant la limite de S ,

$$(3) \quad \int_{x_n}^X f(x) dx = \int_{x_n}^X \varphi(x) \chi(x) dx = \varphi(\xi) \int_{x_n}^X \chi(x) dx,$$

ξ désignant toujours une valeur de x comprise entre x_n et X .

Exemples. — Si l'on prend successivement

$$\chi(x) = 1, \quad \chi(x) = \frac{1}{x}, \quad \chi(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$$

on obtiendra les formules

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_{x_n}^X f(x) dx &= f(\xi) \int_{x_n}^X dx = (X - x_n) f(\xi), \\ \int_{x_n}^X f(x) dx &= \xi f(\xi) \int_{x_n}^X \frac{dx}{x} = \xi f(\xi) \frac{X}{x_n}, \\ &= a) f(\xi - a) \int_{x_n}^X \frac{dx}{x-a} = (\xi - a) \frac{X}{x_n - a}, \end{aligned}$$

dont la première coïncide avec l'équation (19) de la vingt-deuxième Lecion. Ajoutons que le rapport $\frac{N}{x_n}$ dans la seconde formule, et le rapport $\frac{\sum t}{x_n - a}$ dans la troisième, doivent être censés positifs.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES DONT LES VALEURS SONT INFINIES OU INDÉTERMINÉES.
VALEURS PRINCIPALES DES INTÉGRALES INDÉTERMINÉES.

Dans les leçons précédentes, nous avons démontré plusieurs propriétés remarquables de l'intégrale définie

$$(1) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx,$$

mais en supposant : 1^e que les limites x_0 , X étaient des quantités finies, 2^e que la fonction $f(x)$ demeurait finie et continue entre ces mêmes limites. Lorsque ces deux espèces de conditions se trouvent remplies, alors, en désignant par x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de nouvelles valeurs de x interposées entre les valeurs extrêmes x_0 , X , on a

$$(2) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^X f(x) dx.$$

Quand les valeurs interposées se réduisent à deux, l'une très peu différente de x_0 , et représentée par ξ_0 , l'autre très peu différente de X , et représentée par ξ , l'équation (2) devient

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x) dx + \int_{\xi_0}^X f(X) dx + \int_{\xi}^X f(x) dx,$$

et peut s'écrire comme il suit :

$$I_n = (\xi_0 - x_0) f[x_0] + \theta_0 (\xi_0 - x_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x) dx + (X - \xi) f[X] + \theta (X - \xi).$$

Tous nombres inférieurs à l'unité. Si, dans la dernière

formule, on fait converger ξ_n vers la limite x_0 , et ξ vers la limite X , on en tirera, en passant aux limites,

$$(3) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \lim \int_{\xi_n}^\xi f(x) dx.$$

Lorsque les valeurs extrêmes x_0 , X deviennent infinies, ou lorsque la fonction $f(x)$ ne reste pas finie et continue depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=X$, on ne peut plus affirmer que la quantité désignée par S dans les leçons précédentes ait une limite fixe, et par suite on ne voit plus quel sens on doit attacher à la notation (1) qui servait à représenter généralement la limite de S . Pour lever toute incertitude et rendre à la notation (1), dans tous les cas, une signification claire et précise, il suffit d'étendre par analogie les équations (2) et (3) aux cas même où elles ne peuvent plus être rigoureusement démontrées. C'est ce que nous allons faire voir en quelques exemples.

Considérons, en premier lieu, l'intégrale

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$$

Si l'on désigne par ξ_n et ξ deux quantités variables, dont la première converge vers la limite $+ \infty$, et la seconde vers la limite ∞ , on tirera de la formule (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \lim \int_{\xi_n}^\xi e^x dx = \lim (e^\xi - e^{\xi_n}) = e^\infty - e^{-\infty} = \infty.$$

Ainsi, l'intégrale (4) a une valeur infinie positive.

Considérons en second lieu l'intégrale

$$(5) \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$$

prise entre deux limites dont l'une est infinie, tandis que l'autre rend infinie la fonction sous le signe \int , savoir $\frac{1}{x}$. En désignant par ξ_n et ξ deux quantités positives, dont la première converge vers la limite

142. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.
zéro, et la seconde vers la limite ∞ , on tirera de la formule (3)

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^{\alpha} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\ln x \right]_a^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\ln \alpha - \ln a) = \infty.$$

Ainsi l'intégrale (5) a encore une valeur infinie positive.

Il est essentiel d'observer que, si la variable x et la fonction $f(x)$ restent finies l'une et l'autre pour une des limites de l'intégrale (1), on pourra réduire la formule (3) à l'une des deux suivantes :

$$(6) \quad \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{\alpha} f(x) dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow x_0} \int_{x_0}^{\alpha} f(x) dx.$$

On tirera en particulier de ces dernières

$$(7) \quad \begin{cases} \int_{-x_0}^0 \frac{dx}{x} = -e^{-x_0} - e^{x_0} = -c_0 & \int_a^x \frac{dx}{x} = -e^{-x} - e^a = -c_1 \\ \int_{-x_0}^0 \frac{dx}{x} = 10x_0 = -c_0 & \int_a^x \frac{dx}{x} = 10_a = -c_1 \end{cases}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$(8) \quad \int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x},$$

dans laquelle la fonction sous le signe \int , savoir $\frac{1}{x}$, devient infinie pour la valeur particulière $x = 0$ comprise entre les limites $x = -1$, $x = +1$. On tirera de la formule (2)

$$(9) \quad \int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty,$$

la valeur de l'intégrale (8) paraît donc indéterminée. Pour s'assurer qu'elle l'est effectivement, il suffit d'observer que, si l'on désigne par ϵ un nombre infinitement petit, et par p_1, p_2 deux constantes positives, mais arbitraires, on aura, en vertu des formules (6),

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{-1}^{\alpha} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x}.$$

Par suite, la formule (3) deviendra

$$(13) \quad \int_{x_1}^{x_1+\frac{1}{y}} f(x) dx = \lim \left(\int_{x_1}^{x_1+\frac{1}{y}} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_2+\frac{1}{y}} f(x) dx \right) = \lim \left(t_{xy} + t_{yz}^{\mu} \right) - t_y^{\mu},$$

et fournira pour l'intégrale (3) une valeur complètement indéterminée, puisque cette valeur sera le logarithme népérien de la constante arbitraire $\frac{t_x^{\mu}}{t_y^{\mu}}$.

Conservons à présent que la fonction $f(x)$ devienne infinie entre les limites $x = x_m$, $x = X$, pour les valeurs particulières de x représentées par x_1, x_2, \dots, x_m . Si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m, q_m$ des constantes positives, mais arbitraires, on tirera des formules (13) et (3)

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{x_1}^X f(x) dx = \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+q_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_m}^X f(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \lim \left[\int_{x_1}^{x_1+\frac{1}{p_1}} f(x) dx + \int_{x_1+\frac{1}{p_1}}^{x_1+\frac{1}{p_2}} f(x) dx + \dots + \int_{x_m+\frac{1}{p_m}}^X f(x) dx \right] \right\}. \end{aligned}$$

Si les limites x_m, X se trouvaient elles-mêmes remplacées par $+\infty$ et $-\infty$, on aurait

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim \left[\int_{-\infty}^{x_1+\frac{1}{p_1}} f(x) dx + \int_{x_1+\frac{1}{p_1}}^{x_1+\frac{1}{p_2}} f(x) dx + \dots + \int_{x_m+\frac{1}{p_m}}^{+\infty} f(x) dx \right],$$

p, q désignant deux nouvelles constantes positives, mais arbitraires. Ajoutons que, dans le second membre de la formule (13), un devra réduire X à la place de $\frac{1}{y}$, ou x_0 à la place de $-\frac{1}{p}$, si des deux quantités x_m, X une seule devient infinie. Dans tous les cas, les valeurs des intégrales

$$(15) \quad \int_{x_1}^X f(x) dx, \quad \int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx,$$

définies des équations (13) et (14), pourront être, suivant la nature de la fonction $f(x)$, ou des quantités infinies, ou des quantités finies

144. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL

et déterminées, ou des quantités indéterminées qui dépendront des valeurs attribuées aux constantes arbitraires $p_1, v_1, p_{m+1}, v_{m+1}, \dots, p_m, v_m$.

Si, dans les formules (12) et (13), on réduit à l'unité les constantes arbitraires $p_1, v_1, p_m, v_m, \dots, p_m, v_m$, on trouvera

$$(15) \quad \int_a^N f(x) dx = \lim \left[\int_{v_1}^{v_1 + 1} f(x) dx + \int_{v_1 + 1}^{v_1 + 2} f(x) dx + \dots + \int_{v_m + 1}^N f(x) dx \right],$$

$$(16) \quad \int_a^{v_1} f(x) dx = \lim \left[\int_{\frac{1}{p_1}}^{v_1 - \frac{1}{p_1}} f(x) dx + \int_{v_1 - \frac{1}{p_1}}^{v_1} f(x) dx + \dots + \int_{v_m - \frac{1}{p_m}}^{\frac{1}{p_m}} f(x) dx \right].$$

Toutes les fois que les intégrales (14) deviennent indéterminées, les équations (15) et (16) ne fournissent pour chacune d'elles qu'une valeur particulière à laquelle nous donnerons le nom de *valeur principale*. Si l'on prend pour exemple l'intégrale (8) dont la valeur générale est indéterminée, on reconnaîtra que sa valeur principale se

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFISSES SINGULIÈRES.

Concevons qu'une intégrale relative à x , et dans laquelle la fonction sous le signe \int est désignée par $f(x)$, soit prise entre deux limites infiniment rapprochées d'une certaine valeur particulière a attribuée à la valeur x . Si cette valeur a est une quantité finie, et si la fonction $f(x)$ reste finie et continue dans le voisinage de $x = a$, alors, en vertu de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon), l'intégrale proposée sera sensiblement nulle; mais elle pourra obtenir une valeur finie différente de zéro, ou même une valeur infinie, si l'on a

$$x = a \quad \text{ou bien} \quad f(a) = +\infty.$$

Dans ce dernier cas, l'intégrale en question deviendra ce que nous appellerons une *intégrale définie singulière*. Il sera ordinairement facile d'en calculer la valeur à l'aide des formules (15) et (16) de la vingt-troisième Leçon, ainsi qu'on va le voir.

Soient ε un nombre infiniment petit et p , q deux constantes positives, mais arbitraires. Si a est une quantité finie, mais prise parmi les racines de l'équation $f(x) = +\infty$, et si f désigne la limite vers l'apothée convergente le produit $(x - a)f(x)$, tandis que son premier facteur converge vers zéro, les valeurs des intégrales singulières

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) dx, \quad \int_{a-p}^{a+q} f(x) dx$$

146 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.
seront à très peu près [en vertu de la formule (16), vingt-troisième Leçon] :

$$(1) \quad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) dx = f(p)$$

$$(2) \quad \int_{a+\varepsilon}^{a+2\varepsilon} f(x) dx = f(p).$$

Si l'on suppose au contraire $a \rightarrow +\infty$, en appelant ℓ la limite vers laquelle converge le produit $x f(x)$, tandis que la variable x converge vers la limite $+\infty$, on aura sensiblement [vingt-troisième Leçon, équation (15)]

$$(3) \quad \int_{-\frac{1}{\ell}}^{\frac{1}{\ell}} f(x) dx = f(p)$$

$$(4) \quad \int_{-\frac{1}{\ell}}^{\frac{1}{\ell}} f(x) dx = f(p).$$

Il est essentiel d'observer que la limite du produit $(x-a)f(x)$ ou $x f(x)$ dépend quelquefois du signe de son premier facteur. Ainsi, par exemple, le produit $x(x^2+x^3)^{-\frac{1}{2}}$ converge vers la limite $+1$ lorsque suivant que son premier facteur, en s'approchant de zéro, reste positif ou négatif. Il suit de cette remarque que la quantité désignée par ℓ change quelquefois de valeur dans le passage de l'équation (1) à l'équation (2), ou de l'équation (3) à l'équation (4).

La considération des intégrales définies singulières fournit le moyen de entendre la valeur générale d'une intégrale indéterminée, lorsqu'on connaît sa valeur principale. En effet, soit

$$\int_a^x f(x) dx$$

t il s'agit, et concevons que, en admettant les notations

de la Leçon précédente, on fasse

$$(6) \quad E := \int_{x_0}^{x_1 - \epsilon \mu_1} f(x) dx + \int_{x_1 + \epsilon v_1}^{x_2 - \epsilon \mu_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \epsilon v_m}^X f(x) dx,$$

$$(7) \quad F := \int_{x_0}^{x_1 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \epsilon}^{x_2 - \epsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \epsilon}^X f(x) dx.$$

Soient, en outre, $A = \lim E$ la valeur générale et $B = \lim F$ la valeur principale de l'intégrale (5). La différence $A - B = \lim(E - F)$ sera équivalente à la somme des intégrales singulières

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_1 - \epsilon}^{x_1 - \epsilon \mu_1} f(x) dx, \\ \int_{x_1 + \epsilon}^{x_2 - \epsilon} f(x) dx, \\ \int_{x_2 + \epsilon}^{x_2 - \epsilon \mu_2} f(x) dx, \\ \vdots \dots \dots \\ \int_{x_m - \epsilon}^{x_m + \epsilon} f(x) dx, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire à la limite dont s'approche la somme des intégrales (8), tandis que ϵ décroît indéfiniment. De plus, si l'on désigne par f_1, f_2, \dots, f_m les limites vers lesquelles convergent les produits

$$(x - x_1) f(x), \quad (x - x_2) f(x), \quad \dots, \quad (x - x_m) f(x),$$

tandis que leurs premiers facteurs convergent vers zéro, et si ces limites sont indépendantes des signes de ces premiers facteurs, trouvera que la somme des intégrales (8) se réduit sensiblement à

$$(9) \quad f_1 \frac{\mu_1}{v_1} + f_2 \frac{\mu_2}{v_2} + \dots + f_m \frac{\mu_m}{v_m},$$

Lorsqu'on a $x_1 = x_0$ ou $x_m = X$, la différence $A - B$ comprend une intégrale singulière de moins, savoir la première ou la dernière des intégrales (8).

148 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Lorsqu'on suppose $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, les équations (6) et (7) doivent être remplacées par celles qui suivent :

$$(10) \quad E = \int_{-\frac{1}{\epsilon p}}^{x_1 - \epsilon p} f(x) dx + \int_{x_1 + \epsilon v_1}^{x_2 - \epsilon p} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \epsilon v_m}^{\frac{1}{\epsilon p}} f(x) dx,$$

$$(11) \quad F = \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{x_1 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \epsilon}^{x_2 - \epsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} f(x) dx.$$

Dans la même hypothèse, il faut aux intégrales (8) ajouter les deux suivantes

$$(12) \quad \int_{-\frac{1}{\epsilon p}}^{-\frac{1}{\epsilon}} f(x) dx, \quad \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon p}} f(x) dx,$$

dont la somme sera sensiblement équivalente à l'expression

$$(13) \quad f \Gamma \frac{p}{v},$$

si le produit $x f(x)$ converge vers la limite f , tandis que la variable x converge vers l'une des deux limites $-\infty, +\infty$. Si une seule des deux quantités x_0, X devenait infinie, il ne faudrait conserver dans la différence $A - B$ qu'une seule des intégrales (12).

Lorsque pour des valeurs infiniment petites de ϵ , et pour des valeurs finies ou infiniment petites des coefficients arbitraires $p, v, p_1, v_1, \dots, p_m, v_m$, les intégrales singulières (8) et (12), ou du moins quelques-unes d'entre elles, obtiennent ou des valeurs infinies, ou des valeurs finies, mais différentes de zéro, les intégrales

$$\int_{x_0}^X f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

sont évidemment infinies ou indéterminées. C'est ce qui arrive toutes les fois que les quantités f_1, f_2, \dots, f_m ne sont pas simultanément nulles. Mais la réciproque n'est pas vraie, et il pourrait arriver que ces quantités étant nulles toutes à la fois, les intégrales (8) et (12),

ou du moins quelques-unes d'entre elles, obtiennent des valeurs finies différentes de zéro pour des valeurs infinitésimales des coefficients $p_0, p_1, p_m, q_0, \dots, q_m$. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$, le produit $x f(x)$ s'évanouira pour $x=0$, et cependant l'intégrale singulière

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right)$$

cessera de s'évanouir pour des valeurs infinitésimales de y .

Lorsque les intégrales singulières comprises dans la différence $A - B$ s'évanouissent toutes pour des valeurs infinitésimales de ε , quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infinitésimales attribuées aux coefficients $p_0, p_1, p_m, q_0, \dots, q_m$, on est assuré que la valeur générale de l'intégrale (5) se réduit à une quantité finie et déterminée. Soit en effet, dans cette hypothèse, δ un nombre très petit, et supposons ε choisi de manière que, pour des valeurs de $p_0, p_1, p_m, q_0, \dots, q_m$ inférieures à l'unité, chacune des intégrales (8) et (12) ait une valeur numérique inférieure à $\frac{1}{\varepsilon(m+1)} \delta$. La valeur approchée de B_ε représentée par F_ε sera une quantité finie qui ne contiendra plus rien d'arbitraire; et, si l'on attribue aux coefficients $p_0, p_1, p_m, q_0, \dots, q_m$ des valeurs infinitésimales, B_ε s'approchera indéfiniment de A_ε en demeurant compris entre les limites $F_\varepsilon - \delta, F_\varepsilon + \delta$. A sera donc compris entre les mêmes limites, et par conséquent on pourra trouver une quantité finie F qui diffère de A d'une quantité moindre qu'un nombre donné δ . On doit en conclure que la valeur générale A de l'intégrale (5) sera, dans l'hypothèse admise, une quantité finie et déterminée.

Des principes que nous venons d'établir on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème. — Pour que la valeur générale de l'intégrale (1) soit finie et déterminée, il est nécessaire et il suffit que celles des intégrales singulières (8) et (12) qui se trouvent comprises dans la différence $A - B$ se

150. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

éduisent à zéro, pour des valeurs infiniment petites de x , quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infiniment petites attribuées aux coefficients $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_m, q_m$.

Exemple. — Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fonction rationnelle. Pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx$ conserve une valeur finie et déterminée, il sera nécessaire et il suffira : ^{1^e que l'équation $F(x) = 0$ n'ait pas de racines réelles; ^{2^e que le degré du dénominateur $F(x)$ dépasse au moins de deux unités le degré du numérateur $f(x)$.}}

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^X f(x) dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple la quantité X , l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x , on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x , qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'origine $x = x_0$. Soit

$$(1) \quad \beta(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) (vingt-sixième Leçon)

$$(2) \quad \beta(x) - (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)] = \beta(x_0) - 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité, et de la formule (7) (vingt-troisième Leçon)

$$\int_{x_0}^{x+\theta} f(x) dx = \int_{x_0}^X f(x) dx - \int_X^{x+\theta} f(x) dx = x f(x) + \theta x,$$

on

$$(3) \quad \beta(x + \theta x) - \beta(x) = x f(x) + \theta x.$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , la nouvelle fonction $\beta(x)$ sera non seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accrois-

(33) RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉMAL.

sement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\beta(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\beta(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

$$(4) \quad \beta'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x , a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe \int dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale

$$\int_x^X f(x) dx = \int_X^x f(x) dx,$$

considérée comme fonction de x , a pour dérivée $-f(x)$. On aura donc

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(x) dx = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \int_x^X f(x) dx = -f(x).$$

Si aux diverses formules qui précèdent on réunit l'équation (6) de la septième Leçon, il deviendra facile de résoudre les questions suivantes.

Problème 1. — *On demande une fonction $m(x)$ dont la dérivée $m'(x)$ soit constamment nulle. En d'autres termes, on propose de résoudre l'équation*

$$(6) \quad m'(x) = 0.$$

Solution. — Si l'on veut que la fonction $m(x)$ reste finie et continue depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, alors, en désignant par x_0 une valeur particulière de la variable x , on tirera de la formule (6) (septième Leçon)

$$m(x) = m(x_0) + (x - x_0)m'(x_0) + o(x - x_0) = o'$$

$$m(x) = m(x_0),$$

on, si l'on désigne par a la quantité constante $a(x_0)$,

$$(8) \quad a(x) = a.$$

Donc alors la fonction $a(x)$ devra se réduire à une constante et conserver la même valeur a , depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$. On peut ajouter que cette unique valeur sera entièrement arbitraire, puisque la formule (8) vérifiera l'équation (6), quel que soit a .

Si l'on permet à la fonction $a(x)$ d'offrir des solutions de continuité correspondantes à diverses valeurs de x , et si l'on suppose que ces valeurs de x , rangées dans leur ordre de grandeur, soient représentées par x_0, x_1, \dots, x_m , alors l'équation (7) devra subsister seulement depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = x_0$, ou depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2, \dots$, ou enfin depuis $x = x_m$ jusqu'à $x = +\infty$, selon que la valeur particulière de x représentée par x_0 sera comprise entre les limites $-\infty$ et x_1 , ou bien entre les limites x_1 et x_2, \dots , ou enfin entre les limites x_m et $+\infty$. Par conséquent, il ne sera plus nécessaire que la fonction $a(x)$ conserve la même valeur depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, mais seulement qu'elle demeure constante entre deux termes consécutifs de la suite

$$x_0 - x_1, \quad x_1 - x_2, \quad \dots, \quad x_m - x_{m+1} = 0, \quad (9)$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend

$$(9) \quad \begin{cases} a(x) = \frac{x - x_0}{x - x_0} c_0 + \frac{x - x_1}{x - x_1} c_1 + \dots + \frac{x - x_m}{x - x_m} c_m & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ \frac{x - x_0}{x - x_0} c_0 + \frac{x - x_1}{x - x_1} c_1 + \dots + \frac{x - x_{m+1}}{x - x_{m+1}} c_{m+1} & \text{si } x_{m+1} < x < +\infty \end{cases}$$

$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ désignant des quantités constantes, mais arbitraires. En effet, dans ce cas, la fonction $a(x)$ sera constamment égale à c_0 entre les limites $x = x_0, x = x_1$; à c_1 entre les limites $x = x_1, x = x_2, \dots$; enfin à c_m entre les limites $x = x_m, x = +\infty$.

Si l'on veut que $a(x)$ se réduise à c_0 pour des valeurs négatives,

154. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

et à c_1 pour des valeurs positives de x , il suffira de prendre

$$(10) \quad u(x) = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{1 - \sqrt{1+x^2}}$$

Problème II. Trouver la valeur générale de y propre à vérifier l'équation

$$(11) \quad dy = f(x)dx,$$

Solution. Si l'on désigne par $F(x)$ une valeur particulière de l'inconnue y , et par $F(x) + \varphi(x)$ sa valeur générale, on trouve de la formule (11), à laquelle ces deux valeurs devront satisfaire,

$$F'(x) = f(x), \quad F(x) + \varphi(x) = F(x)$$

et, par suite,

$$\varphi'(x) = 0,$$

D'ailleurs, il résulte de la première des équations (11) qu'on satisfait à la formule (11) en prenant $y = \int_{x_0}^x f(x')dx'$. Une valeur générale de y sera

$$(12) \quad y = \int_{x_0}^x f(x')dx' + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction propre à vérifier l'équation (11). Cette valeur générale de y , qui comprend, comme cas particulier, l'intégrale (1) et qui conserve la même forme, quelle que soit l'origine x_0 de cette intégrale, est représentée dans le calcul par la simple notation $\int f(x)dx$, et reçoit le nom d'*intégrale indéfinie*. Cela posé, la formule (11) entraîne toujours la suivante

$$(13) \quad y = \int f(x)dx,$$

équation, en sorte qu'on a identiquement

$$d \int f(x)dx = f(x)dx,$$

à laquelle l'intégrale (1), la valeur générale de y ,

on $\int f(x) dx$, pourra toujours être présentée sous la forme

$$(15) \quad \int f(x) dx = F(x) + \omega(x),$$

et devra se réduire à l'intégrale (1), pour une valeur particulière de $\omega(x)$ qui vérifiera en même temps l'équation (6) et la suivante :

$$(16) \quad \beta(x) - \int_{x_0}^x f(x) dx = F(x) + \omega(x).$$

Si, de plus, les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont l'une et l'autre continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la fonction $\beta(x)$ sera elle-même continue, et par suite $\omega(x) = \beta(x) - F(x)$ conservera constamment la même valeur entre ces limites, entre lesquelles on aura

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega(x_0), \\ \beta(x) - F(x) &= \beta(x_0) - F(x_0) = F(x_0), \quad \beta(x) = F(x) + F(x_0), \\ (17) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx &= F(x) - F(x_0). \end{aligned}$$

Enfin, si dans l'équation (17) on pose $x = X$, on trouvera

$$(18) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = F(X) - F(x_0).$$

Il résulte des équations (15), (17) et (18) que, étant donnée une valeur particulière $F(x)$ de x , propre à vérifier la formule (1), on peut en déduire : 1^o la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$; 2^o celles des deux intégrales définies $\int_{x_0}^x f(x) dx$, $\int_{x_0}^X f(x) dx$, dans le cas où les fonctions $f(x)$, $F(x)$ restent continues entre les limites de ces deux intégrales.

Exemple. — Comme on vérifie l'équation $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ en prenant $y = \arctan x$, et que les deux fonctions $\frac{1}{1+x^2} dy$ et $\arctan x$ restent finies et continues entre les limites $x = -\infty$, $x = \infty$, on tirera des

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES INTEGRALES INDÉFINIES. MéTHODE POUR DÉTERMENER
LES VALEURS DE CES MÊMES INTEGRALES.

D'après ce qui a été dit dans la Leçon précédente, l'intégrale indéfinie

$$(1) \quad \int f(x) dx$$

n'est autre chose que la valeur générale de l'inconnue y assujettie à vérifier l'équation différentielle

$$(2) \quad dy = f(x) dx.$$

De plus, étant donné une valeur particulière $F(x)$ de la même inconnue, il suffit, pour obtenir la valeur générale, d'ajouter à $F(x)$ une fonction $v(x)$ propre à vérifier l'équation $v'(x) = 0$, ou ce qui revient au même, une expression algébrique qui ne puisse admettre qu'un nombre fini de valeurs constantes, dont chacune s'adapte entre certaines limites assignées à la variable x . Pour abréger, nous désignerons donc devant par la lettre c une expression de cette nature, et nous l'appellerons *constante arbitraire*, ce qui ne voudra pas dire qu'elle doive toujours conserver la même valeur, quel que soit x . Cela pressé, on aura

$$(3) \quad \int f(x) dx = F(x) + c.$$

Quand on remplace la fonction $F(x)$ par l'intégrale définie $\int_a^x f(x) dx$, qui est elle-même une valeur particulière de y , la formule (3) se

158 RÉSUMÈ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

réduit à

$$(4) \quad \int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + \mathcal{C}.$$

En étendant la définition que nous avons donnée de l'intégrale (1) au cas où la fonction $f(x)$ est supposée imaginaire, on reconnaîtra facilement que, dans cette hypothèse, les équations (3) et (4) subsistent encore. Seulement, la constante arbitraire \mathcal{C} devient alors imaginaire en même temps que $f(x)$, c'est-à-dire qu'elle prend la forme $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \sqrt{-1}$, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 désignant deux constantes arbitraires, mais réelles.

Avant d'aller plus loin, il importe d'observer qu'en formant la somme ou la différence, ou même une fonction linéaire quelconque de deux ou de plusieurs constantes arbitraires, on obtient pour résultat une nouvelle constante arbitraire.

Plusieurs propriétés remarquables des intégrales définies se déduisent facilement de l'équation (4) combinée avec les formules (13) (vingt-deuxième Leçon) et (2), (3), (4), (5) (vingt-troisième Leçon). En effet, si, après avoir remplacé X par x dans les deux membres de chacune de ces formules, on ajoute aux intégrales qu'ils renferment des constantes arbitraires, on trouvera, en désignant par a, b, c, \dots des constantes supposées connues, et par u, v, w, \dots des fonctions de la variable x ,

$$(5) \quad \int au dx = a \int u dx,$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int (u+v+w+\dots) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx + \dots, \\ \int (u-v) dx = \int u dx - \int v dx, \\ \int (au+bv+cw+\dots) dx = a \int u dx + b \int v dx + c \int w dx + \dots, \\ \int (u+v\sqrt{-1}) dx = \int u dx + \sqrt{-1} \int v dx. \end{array} \right.$$

Ces équations subsistent dans le cas même où $a, b, c, \dots, u, v, w, \dots$ deviennent imaginaires.

Intégrer la formule différentielle $f(x) dx$, ou, en d'autres termes

intégrer l'équation (2), c'est trouver la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$. L'opération par laquelle on y parvient est une *intégration indéfinie*. L'*intégration définie* consisterait à trouver la valeur d'une intégrale définie, telle que $\int_{x_0}^x f(x) dx$. Nous allons maintenant faire connaître les quatre principales méthodes à l'aide desquelles on peut effectuer, dans certains cas, la première de ces deux opérations.

Intégration immédiate. — lorsque dans la formule $f(x)dx$ on reconnaît la différentielle exacte d'une fonction déterminée $F(x)$, la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$ se déduit immédiatement de l'équation (3). On étend le nombre des cas auxquels cette espèce d'intégration est applicable, en observant que les facteurs constants renfermés dans $f(x)$ peuvent être placés à volonté en dedans ou en dehors du signe \int [voir l'équation (5)].

Exemples :

$$\begin{aligned} \int x dx &= x^2 + \mathbb{C}, & \int (a+b)x^n dx &= x^{n+1} + \mathbb{C}, & \int x^m dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathbb{C}, \\ \int x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3 + \mathbb{C}, & \int \frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{x} + \mathbb{C}, \\ \int \frac{dx}{x^m} &= -\frac{1}{(m-1)}x^{m-1} + \mathbb{C}, & \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{x} + \mathbb{C}, \\ \int \frac{dx}{x^3} &= -\frac{1}{2}(x^{-2}) + \mathbb{C}, & \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + \mathbb{C}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + \mathbb{C}, & \mathbb{C} &= \frac{1}{2}\pi - \arccos x, \\ \int e^x dx &= e^x + \mathbb{C}, & \int \Lambda^x d\Lambda &= \Lambda^x + \mathbb{C}, & \int \Lambda^x dx &= \frac{\Lambda^x}{\ln \Lambda} + \mathbb{C}, \\ \int \cos x dx &= \sin x + \mathbb{C}, & \int \sin x dx &= -\cos x + \mathbb{C}, \\ \int \csc^2 x dx &= -\cot x + \mathbb{C}, & \int \sec^2 x dx &= \operatorname{tang} x + \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Intégration par substitution. — Concevons qu'à la variable x on substitue une autre variable z liée à la première par une équation de laquelle on tire $z = \varphi(x)$ et $x = \psi(z)$. La formule (2) se trouvera

160 - RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

remplacée par la suivante :

$$(7) \quad dy = f(y(z))y'(z)dz.$$

Si l'on fait, pour abrégier, $f(y(z))y'(z) = f(z)$, la valeur générale de y tirée de l'équation (7) sera représentée par l'intégrale indéfinie $\int f(z)dz$. D'ailleurs, cette valeur générale doit coïncider avec l'intégrale (1). Donc, si, en vertu de la relation établie entre x et z , on a identiquement

$$(8) \quad \int f(x)dx = \int f(z)dz,$$

on en conclura

$$(9) \quad \int f(x)dx = \int f(z)dz.$$

Supposons maintenant que la valeur de $\int f(x)dx$ soit donnée par une équation de la forme

$$(10) \quad \int f(x)dx = \beta(x) + C,$$

on tirera de cette équation

$$(11) \quad \int f(x)dx = \beta(x) + C - \beta(x).$$

Exemples. — En admettant la formule (10) et posant successivement

$$x^2 + a = z, \quad ax = z, \quad \frac{z}{a} = x, \quad x^2 + a^2 = z^2,$$

$$(x - a) = z - a, \quad (x + a) = z + a, \quad \cos x = \cos z,$$

on tirera de la formule (11) combinée avec l'équation (7)

$$\int f(x^2 + a^2)dx = \beta(x^2 + a^2) + C,$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\beta(ax) + C,$$

$$\int f\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\beta\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

$$\int x^2 f(x^2 + a^2)dx = \frac{1}{2}\beta(x^2 + a^2) + C,$$

$$\int x^{n+1} f(x^n)dx = \frac{1}{n}\beta(x^n) + C.$$

$$\begin{aligned}\int f(x) \frac{dx}{x} &= \tilde{f}(x) + C, \\ \int e^x f(e^x) dx &= \tilde{f}(e^x) + C, \\ \int \cos x f(\sin x) dx &= \tilde{f}(\sin x) + C, \\ \int \sin x f(\cos x) dx &= -\tilde{f}(\cos x) + C.\end{aligned}$$

Ces dernières formules étant combinées à leur tour avec celles qui résultent de l'intégration immédiate, on trouvera

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-a} &= \frac{1}{a} \ln(x-a) + C, \\ \int \frac{dx}{(x-a)^m} &= -\frac{1}{(m-1)}(x-a)^{m-1} + C, \\ \int \frac{dx}{1+a^2 x^2} &= \frac{1}{a} \arctan(ax) + C, \\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C, \\ \int \frac{x dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a} \ln(x^2+a^2) + C, \\ \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \sqrt{x^2+a^2} + C, \\ \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C, \quad \int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} + C, \\ \int \cosh ax dx &= \frac{1}{a} \sinh ax + C, \quad \int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C, \\ \int \frac{dx}{a \cosh x} &= \frac{1}{a} (\tanh x)^2 + C, \quad \int \frac{dx}{a \sinh x} = \ln|\tanh x| + C, \\ \int \frac{dx}{a(\cosh x)^m} &= -\frac{1}{(m-1)a(\cosh x)^{m-1}} + C, \quad \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \arctan e^x + C, \\ \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} + C = -\csc x + C.\end{aligned}$$

Intégration par décomposition. — Cette espèce d'intégration s'effectue à l'aide des formules (6), lorsque la fonction sous le signe \int peut être décomposée en plusieurs parties de telle manière que chaque partie, multipliée par dx , donne pour produit une expression

162 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.

facilement intégrable. Elle s'applique particulièrement au cas où la fonction sous le signe \int se réduit, soit à une fonction entière, soit à une fraction rationnelle.

Exemples :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C \\ \int (a + bx + cx^2 + \dots) dx &= a \int dx + b \int x dx + c \int x^2 dx + \dots \\ &= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \dots + C \end{aligned}$$

Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions différentes de x , et u' , v' leurs dérivées respectives, u sera une valeur particulière de y , propre à vérifier l'équation différentielle

$$dy = u'dx + v'dx + u'dv + v'du,$$

de laquelle on tirera généralement

$$y = ue + \int u'dv + \int v'du - \int u'dv - \int v'du,$$

et, par suite,

$$\int u'dv = ue - (\int v'du - \text{C}),$$

ou, plus simplement,

$$(13) \quad \int u'dv = ue - \int v'du,$$

la constante arbitraire C pouvant être census comprise dans l'intégrale $\int v'du$.

Exemples :

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= x^3 - \int x \frac{dx}{x} = x^3 - x(x-1) + \text{C}_1 = x^3 - x^2 + x + \text{C}_1, \\ \int x \cos x dx &= x \sin x + \int \sin x dx = x \sin x + \text{C}_2, \\ \int x \sin x dx &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \text{C}_3. \end{aligned}$$

Nota. — Il est essentiel d'observer que les constantes arbitraires, qui sont censées comprises dans les intégrales indéfinies que renferment les deux membres de l'équation (12), peuvent avoir des valeurs numériques très différentes. Cette remarque suffit pour rendre raison de la formule

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = 1 + \int \frac{dx}{x \ln x},$$

à laquelle on parvient, en posant dans l'équation (12)

$$u = \frac{1}{\ln x} \quad \text{et} \quad v = \ln x,$$

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

SUR LES INTEGRALES INDEFINIES QUI DÉTERMINENT DES CONNEXIONS ENTRE LES

4

On appelle fonctions *algébriques* celles que l'on forme en n'employant que les premières opérations de l'Algèbre, savoir : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'élevation des variables à des puissances fixes. Les fonctions algébriques d'une variable sont *rationnelles* lorsqu'elles contiennent seulement des puissances entières de cette variable, c'est-à-dire lorsqu'elles se réduisent à des fonctions entières ou à des fractions rationnelles. Elles sont *irrationnelles* dans le cas contraire.

Cela posé, concevons que, $f(x)$ désignant une fonction algébrique de x , on cherche la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$. Si la fonction $f(x)$ est rationnelle, on décomposera le produit $f(x)dx$ en plusieurs termes qui se présenteront sous l'une des formes :

$$(1) \quad Ax^m dx = \frac{A dx}{x^m} = \frac{Ax}{x^m} = \frac{(A + Bx - Cx^2 - \dots)(x^m)}{(x - a)^m} = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} - Cx^{m-2} - \dots}{(x - a)^m},$$

a, α, β, A, B désignant des constantes réelles et m un nombre entier, puis l'on intégrera ces différents termes à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \int Ax^m dx &= A \frac{x^{m+1}}{m+1} + C_1, \quad \int \frac{Ax}{x^m} dx = AV(x^{m-1}) + C_2, \\ \int \frac{Ax}{(x-a)^m} dx &= \frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C_3, \\ \int \frac{(Ax+Bx^2+Cx^3+\dots)}{(x-a)^m} dx &= (Ax+Bx^2+Cx^3+\dots) \int \frac{dx}{(x-a)^m} + \int \frac{Ax^2+Bx^3+Cx^4+\dots}{(x-a)^{m-1}} dx \\ &= \frac{1}{(m-1)} (Ax+Bx^2+Cx^3+\dots) ((x-a)^{1-m}) + (W_1 + Ax+Bx^2+Cx^3+\dots) \int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}}, \\ \int \frac{(Ax+Bx^2+Cx^3+\dots)}{(x-a)^m} dx &= \frac{Ax+Bx^2+Cx^3+\dots}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C_4. \end{aligned}$$

dont les premières se déduisent des principes établis dans la leçon précédente, et dont la dernière, tirée par induction de la troisième, peut être, *a posteriori*, facilement vérifiée.

Exemples :

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\lambda - \beta x}{x^2 + \beta x + 1} + \frac{\lambda + \beta x}{x^2 - x + \beta x^2 + 1} \right) dx \\ & \quad \lambda \sqrt{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \text{certaine tang} \frac{(x-\alpha)^2}{\beta} + \text{c.} \\ & \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 0} dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 + \text{c.} \\ & \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 0} dx = \text{c.} \\ & \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \frac{1}{(x+1)^2 + \beta^2} dx \\ & \quad \frac{1}{\beta} \ln \frac{(x+1)^2 + \beta^2}{x^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta} \text{arc tang} \frac{\beta x + 1}{\sqrt{3}} + \text{c.} \end{aligned}$$

Lorsque la fonction $f(x)$, sans cesser d'être algébrique, devient irrationnelle, il n'y a plus de règles générales au moyen desquelles on puisse calculer en termes finis la valeur de $\int f(x) dx$. À la vérité, il suffit de pour y parvenir, de substituer à la variable x une seconde variable z tellement choisie que l'expression $f(x) dx$ se trouve transformée en une autre $f(z) dz$, dans laquelle la fonction $f(z)$ soit rationnelle. Mais on n'a point de méthode sûre pour opérer une semblable transformation, si ce n'est dans un petit nombre de cas particuliers que nous allons faire connaître.

Soit d'abord $f(x, z)$ une fonction rationnelle de x et de z , z étant une fonction irrationnelle de x , déterminée par une équation algébrique d'un degré quelconque par rapport à z , mais du premier degré par rapport à x . Pour rendre rationnelle et intégrable la formule différentielle $f(x, z) dx$, il suffira évidemment de substituer la variable z à la variable x . On doit surtout remarquer le cas où la valeur de z est

66 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

ournée, soit par l'une des équations binômes :

$$2) \quad z^n - (ax + b) = 0, \quad (a_0x + b_0)z^n - (a_1x + b_1) = 0,$$

soit par l'équation du second degré

$$3) \quad (a_0x + b_0)z^2 - 2(a_1x + b_1)z + (a_2x + b_2) = 0,$$

$a, b, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ étant des constantes réelles et n un nombre entier quelconque. Comme on satisfait aux équations (2) en posant

$$z = (ax + b)^{\frac{1}{n}} \quad \text{ou} \quad z = \left(\frac{a_1x + b_1}{a_0x + b_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

tâche l'équation (3) en posant

$$z = \frac{a_1x + b_1 + \sqrt{(a_1x + b_1)^2 - (a_0x + b_0)(a_2x + b_2)}}{a_0x + b_0},$$

on résulte qu'on rend intégrable la formule

$$(4) \quad f[x, (ax + b)^{\frac{1}{n}}] dx \quad \text{ou} \quad f\left[x, \left(\frac{a_1x + b_1}{a_0x + b_0} \right)^{\frac{1}{2}}\right] dx,$$

en égalant à z le radical qu'elle renferme, et les deux formules

$$(5) \quad \begin{cases} f\left[x, \frac{a_1x + b_1 + \sqrt{(a_1x + b_1)^2 - (a_0x + b_0)(a_2x + b_2)}}{a_0x + b_0}\right] dx, \\ f\left[x, \sqrt{(a_1x + b_1)^2 - (a_0x + b_0)(a_2x + b_2)}\right] dx, \end{cases}$$

en y substituant la valeur de x en z tirée de l'équation (3) ou, ce qui revient au même, de la suivante :

$$(6) \quad \sqrt{(a_1x + b_1)^2 - (a_0x + b_0)(a_2x + b_2)} = (a_0x + b_0)z - (a_1x + b_1).$$

Concevons maintenant qu'il s'agisse de rendre intégrable l'expression

$$f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}) dx,$$

A, B, C étant des constantes réelles. Il suffira évidemment d'employer l'équation (6), après avoir réduit le trinôme $Ax^2 + Bx + C$ à la forme

$(a_1x + b_1)^2 + (a_0x + b_0)(a_2x + b_2)$. Or on peut effectuer cette réduction d'une infinité de manières, en choisissant un binôme $a_1x + b_1$ tel que la différence $Ax^2 + Bx + C - (a_1x + b_1)^2$ soit décomposable en facteurs réels du premier degré, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$(8) \quad Ab_1^2 + Ca_1^2 - Ba_1b_1 + \frac{1}{4}B^2 - AC > 0.$$

En cherchant les valeurs les plus simples de a_1 et de b_1 propres à remplir cette dernière condition, on trouvera : 1° si $\frac{1}{4}B^2 - AC$ est positif,

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0;$$

2° si A est positif,

$$a_1 = A^{\frac{1}{2}}, \quad b_1 = 0;$$

3° si C est positif,

$$b_1 = C^{\frac{1}{2}}, \quad a_1 = 0.$$

De plus, comme on aura

$$Ax^2 + Bx + C - (A^{\frac{1}{2}}x)^2 = x(Bx + C)$$

et

$$Ax^2 + Bx + C - (C^{\frac{1}{2}})^2 = x(Ax + B),$$

on pourra prendre dans le second cas $a_0x + b_0 = 1$, et dans le troisième $a_0x + b_0 = x$. En résumé, si $Ax^2 + Bx + C$ est le produit de deux facteurs réels $a_0x + b_0$, $a_2x + b_2$, on rendra la formule (7) rationnelle en posant

$$(9) \quad \sqrt{(a_0x + b_0)(a_2x + b_2)} = (a_0x + b_0)\tilde{x}, \quad \text{ou} \quad \frac{a_2x + b_2}{a_0x + b_0} = \tilde{x}^2.$$

Dans le cas contraire, le radical $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ne pourra être une quantité réelle, à moins que les deux coefficients A et C n' soient positifs. Dans tous les cas, on rendra l'expression (17) en supposant

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } A \text{ est positif,} \\ \text{et} \\ \text{si } C \text{ est positif,} \end{array} \right. \quad \sqrt{Ax^2 + Bx + C} = z - A^{\frac{1}{2}}x, \quad \sqrt{A + B\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}} = z - C^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}.$$

168. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INTÉGRALE

Il est aisément vérifiable, *a posteriori*, ces diverses conséquences de l'équation (16).

Exemple. — On tirera de la première des équations (16)

$$\int_{\sqrt{A(x^2 + Bx + C)}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{A(x^2 + Bx + C)}} = \int_{\sqrt{Bx + C - B}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{div} \left(\ln \frac{\sqrt{A(x^2 + Bx + C)} - Bx - C}{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)} - Bx - C} \right)$$

$$= \int_{\sqrt{C-B}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)}} = \operatorname{div} \left(\ln \frac{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)} - Bx + C}{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)} + Bx - C} \right)$$

$$= \int_{\sqrt{C-B}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)}} = \operatorname{div} \left(\ln \frac{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)} - Bx + C}{\sqrt{A(x^2 - Bx + C)} + Bx - C} \right)$$

et de la dernière :

Il importe d'observer que, si l'on désigne par $f(x, v)$ une fonction extérieure des variables x, v, u_1, v_1, \dots , et par p_1, p_2, \dots des puissances du nombre entier n , les expressions différentes

$$(m) \quad \begin{cases} \int \left[x_1 (ax^2 + bx)^\frac{1}{2} \left(dx^2 + \frac{2}{a} dx + \frac{b}{a} \right)^p \right] dx \\ \int \left[x_1 \left(\frac{ax^2 + bx}{a_1 x^2 + b_1} \right)^\frac{1}{2} \left(\frac{dx^2 + \frac{2}{a} dx + \frac{b}{a}}{a_1 x^2 + b_1} \right)^p \right] dx \end{cases}$$

seront de la même forme que les expressions (13) et pourront être intégrées de la même manière. Ainsi l'on trouvera, en posant $x = \mu$,

$$\int (x_1 x_2 x_3)^\frac{1}{2} dx + \mu \int \frac{x^2 dx}{x^2 - a} = \mu \left(x - \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a} \right) \right) + C$$

Ajoutons que l'on réduira immédiatement les expressions différencielles

$$(n) \quad \int x^k (ax^2 + bx)^\frac{1}{2} x^{m-1} dx = \int x^k \left(\frac{dx^2 + \frac{2}{a} dx + \frac{b}{a}}{a_1 x^2 + b_1} \right)^p dx = x^{m-1} dx$$

(μ désignant une constante quelconque) aux formules (13), à l'expression

$$(o) \quad \int [x_1 (a_1 x^2 + b_1)^\frac{1}{2}, (a_2 x^2 + b_2)^\frac{1}{2}] dx$$

à la formule (7), en posant, dans les expressions (12) et (13), $a^2 = y$ et dans l'expression (13), $a_0 w + b_0 = y^2$.

Exemples. — On intègre $\frac{x^{2m+1}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$, en posant $a^2 = r^2, y^2 = r^2 - x^2$ ou simplement $x^2 = r^2 - y^2$, et $\frac{dx}{(x - c)^2 + (x + c)^2}$, en posant $a = c^2, Y^2 = (x - c)^2 + (x + c)^2$, puis $(Y^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = z = y$ ou simplement $(x - c)^2 + (x + c)^2 = z^2$.

En terminant cette leçon, nous ferons remarquer que, dans tous les cas où l'on parvient à évaluer la valeur d'une intégrale indéfinie qui renferme une fonction algébrique, cette valeur se compose de plusieurs termes dont chacun se présente sous l'une des formes

$$(14) \quad f(x), \quad \Lambda f(x), \quad \Lambda \arctan g(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction algébrique de x , et Λ une quantité constante. Les expressions $\arcsin x$, $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos x$ et autres semblables sont évidemment comprises sous la dernière des trois formes que nous venons d'indiquer.

Il suffira de poser successivement (*voir la vingt-huitième Leçon*)

$$a_1x + b_1 = z^n \quad a_1x + b = z^m \quad \frac{a_1x + b}{a_1x + b_1} = z^{\frac{m-n}{n}}$$

La formule $(ax + b)^n (a_1x + b_1)^m dx$ n'étant pas toujours intégrable, il est bon de faire voir comment on peut ramener la détermination de l'intégrale (9) à celle de plusieurs autres intégrales de même espèce, mais dans lesquelles les exposants des binômes $ax + b$, $a_1x + b_1$ ne soient plus les mêmes. Pour y parvenir de la manière la plus directe, on aura recours à l'équation (12) (vingt-septième Leçon), que l'on présentera sous la forme

$$(3) \quad \int u^n d\ln v - uv = \int u v' d\ln u$$

puis l'on supposera les fonctions u et v respectivement proportionnelles à certaines puissances de deux des trois quantités

$$(4) \quad a_1x + b_1 = a_1x + b_0 = \frac{a_1x + b}{a_1x + b_1}$$

Comme ces trois quantités, combinées deux à deux, offrent six combinaisons différentes, on voit que la formule (3) donnera naissance à six équations distinctes. On simplifiera le calcul, en opérant comme si u et v devaient toujours rester positives, et réduisant en conséquence la formule (3) à cette autre :

$$(5) \quad \int u v' d\ln v - uv = \int u v' d\ln u$$

puis ayant regard aux équations

$$d\ln(a_1x + b) = \frac{a_1 dx}{a_1x + b}$$

$$d\ln(a_1x + b_0) = \frac{a_1 dx}{a_1x + b_0}$$

$$d\ln \frac{a_1x + b}{a_1x + b_1} = \frac{(ab_1 - a_1b) dx}{(a_1x + b)(a_1x + b_1)}$$

desquelles on tiendra la valeur de dx pour la substituer dans l'intégrale

à une puissance de $ax + b_1$

$$(9) \quad \begin{cases} \int (ax + b)^p (a_1 x + b_1)^q dx \\ \quad - \frac{(ax + b)^{p+1} (a_1 x + b_1)^{q+1}}{(p+q+1)a} - \frac{q(a_1 b - ab_1)}{(p+q+1)a} \int (ax + b)^p (a_1 x + b_1)^{q+1} dx \end{cases}$$

5° En supposant a proportionnel à une puissance de $a_1 x + b_1$, et c'est
une puissance de $\frac{ax + b}{a_1 x + b_1}$

$$(10) \quad \begin{cases} \int \frac{(ax + b)^{p+1} (a_1 x + b_1)^{q+1}}{ab_1 - a_1 b} dx \frac{ax + b}{a_1 x + b_1} \\ \quad - \frac{(a_1 x + b_1)^{p+1}}{(p+1)(ab_1 - a_1 b)} \left(\frac{ax + b}{a_1 x + b_1} \right)^{q+1} dx \left(\frac{ax + b}{a_1 x + b_1} \right)^{q+1} \\ \quad - \frac{(ax + b)^{p+1} (a_1 x + b_1)^{q+1}}{(p+1)(ab_1 - a_1 b)} - \int \frac{(ax + b)^{p+1} (a_1 x + b_1)^{q+1}}{(p+1)(ab_1 - a_1 b)} dx (a_1 x + b_1)^{q+1} \\ \quad - \frac{q(a_1 b - ab_1)}{(p+1)(ab_1 - a_1 b)} \int (ax + b)^p (a_1 x + b_1)^q dx \end{cases}$$

6° En supposant a proportionnel à une puissance de $ax + b_1$, et c'est
une puissance de $\frac{ax + b}{a_1 x + b_1}$

$$(11) \quad \begin{cases} \int \frac{f(ax + b)^p (a_1 x + b_1)^q dx}{(ax + b)^{p+1} (a_1 x + b_1)^{q+1}} = \frac{(p+q+2)a}{(p+1)(a_1 b - ab_1)} \int (ax + b)^{q+1} (a_1 x + b_1)^p dx \\ \quad - \frac{q(a_1 b - ab_1)}{(p+1)(a_1 b - ab_1)} \int (ax + b)^p (a_1 x + b_1)^{q+1} dx \end{cases}$$

A l'aide des formules (6), (7), (8), (9), (10), (11), on pourra faire

174 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL

L'autre est inférieur à -1 , on fera servir la formule (6) ou la formule (7) à la réduction simultanée des valeurs numériques de ces deux exposants, jusqu'à ce que l'un d'eux se change en une quantité comprise entre les limites 0 et -1 .

Lorsque les exposants μ , ν ont des valeurs numériques entières, alors, en opérant comme on vient de le dire, on aboutit par les règles l'une et l'autre à l'une des deux quantités 0 et -1 . Cette réduction étant effectuée, l'intégrale (2) se trouve nécessairement remplacée par l'une des quatre suivantes :

$$(12) \quad \begin{cases} \int dx = x + \varepsilon, \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{ab} \ln(ax+b)^2 + \varepsilon, \quad \int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{1}{ab_1} \ln(a_1x+b_1), \\ \int \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)} = \frac{1}{ab_1 - a_1b} \int dt \frac{ax+b}{a_1x+b_1} = \frac{1}{a(ab_1 - a_1b)} \ln \left(\frac{a_1x+b_1}{a_1x+a_1b} \right). \end{cases}$$

En général, toutes les fois que la formule $(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx$ sera intégrable, les méthodes de réduction ci-dessus indiquées permettront de substituer à l'intégrale (2) d'autres intégrales plus simples, dont il sera facile d'obtenir les valeurs.

Si l'on veut appliquer les mêmes méthodes à la réduction de l'intégrale (1), il faudra supposer dans la formule (5) les quantités n et μ proportionnelles à certaines puissances, non plus des quantités x (1), mais des suivantes :

$$(13) \quad ax+b = ay^2+b, \quad x=y^2, \quad \frac{ax+b}{x} = \frac{ay^2+b}{y^2},$$

Exemple. — Concevons qu'il s'agisse de réduire l'intégrale

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \int (1+y^2)^{-n} dy,$$

n désignant un nombre entier supérieur à l'unité. On suppose y proportionnel à des puissances de y^2 et de $\frac{1+y^2}{y^2}$; et, comme on

$$d\ln \frac{1+y^2}{y^2} = 2 \left(\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{y} \right) dy = - \frac{2}{y(1+y^2)} dy,$$

on tirera de la formule (5)

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int^r_{-r} \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \int^r_{-r} \frac{y(1+y^2)^{-n+1}}{2} dI \frac{(1+y^2)^{-n+3}}{y^2} \\ \qquad \qquad \qquad - \int^r_{-r} \frac{y^{-2n+3}}{2(n-1)} \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right)^{-n+1} dI \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right)^{-n+3} \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{y(1+y^2)^{-n+1}}{n(n-1)} - \int^r_{-r} \frac{y(1+y^2)^{n-1}}{n(n-1)} dI y^{-2n+3} \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{y}{n(n-1)(1+y^2)^{n-1}} + \frac{n(n-3)}{2n-2n+3} \int^r_{-r} \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}. \end{array} \right.$$

TRENTIÈME LEÇON.

SUR LES INTÉGRALES INDÉFINIES QUI RENFERMENT DES FONCTIONS EXPONENTIELLES,
LOGARITHMIQUES OU CIRCULAIRES.

On nomme *fonctions exponentielles*, *fonctions logarithmiques*, celles qui contiennent des exposants variables ou des logarithmes, et *fonctions trigonométriques ou circulaires*, celles qui contiennent des lignes trigonométriques ou des arcs de cercle. Il serait fort utile d'intégrer les formules différentielles qui renferment de semblables fonctions; mais on n'a point de méthodes sûres pour y parvenir, si ce n'est dans un petit nombre de cas particuliers que nous allons passer en revue.

D'abord, si l'on désigne par f une fonction telle, que l'intégrale indéfinie $\int f(z) dz$ ait une valeur connue, on en déduira les valeurs de

$$(1) \quad \int f(\ln x) \frac{dx}{x}, \quad \int e^x f(e^x) dx, \quad \int \cos x f(\sin x) dx, \quad \int \sin x f(\cos x) dx,$$

en posant successivement, comme dans la vingt-septième Leçon,

$$\ln x = z, \quad e^x = z, \quad \sin x = z, \quad \cos x = z.$$

On déterminerait de même les trois intégrales

$$(2) \quad \begin{cases} \int f(\operatorname{arctan} x) \frac{dx}{1+x^2}, \\ \int f(\operatorname{arc sin} x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \int f(\operatorname{arc cos} x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{cases}$$

en posant, dans la première, $\operatorname{arctan} x = z$, et, dans les deux dernières, $\operatorname{arc sin} x = z$ ou $\operatorname{arc cos} x = z$.

Observons encore que, si l'on désigne par $f(u)$, $f(u, v)$, $f(u, v, w, \dots)$ des fonctions algébriques des variables u , v , w , ..., il suffira de faire $e^{ux} = z$ pour rendre algébrique l'expression différentielle renfermée sous le signe \int dans l'intégrale

$$(4) \quad \int f(e^{ux}) dx,$$

et c'est — on sait $x = \ln z$ — pour produire le même effet sur les deux intégrales

$$(5) \quad \begin{cases} \int f(\sin u, \cos u) du, \\ \int f(\sin u, \cos u, \sin u, \cos u, \dots, \sin u, \cos u, \sin u, \cos u, \dots) du, \end{cases}$$

dont la seconde n'a pas plus de généralité que la première, attendu qu'on peut y remplacer les sinus et cosinus des angles $u, 2u, 3u, \dots$ par leurs valeurs en $\sin u$ et $\cos u$, tirées des équations de la forme

$$\cos(ux) + i\sin(ux) = e^{iux} = (\cos u + i\sin u)^x,$$

$$\cos(ux) - i\sin(ux) = e^{-iux} = (\cos u - i\sin u)^x.$$

Ajoutons que, si, dans la première des intégrales (5), on égale $\sin ux$ non pas à z , mais à $e^{\frac{1}{2}\ln z}$, cette intégrale prendra la forme très simple

$$(6) \quad \int (1 - e^{\frac{1}{2}\ln z})^a (1 - e^{-\frac{1}{2}\ln z})^b dz.$$

On pourra, par exemple, en désignant par p , q deux quantités constantes,

$$(6) \quad \int (1 - e^{\frac{1}{2}\ln z})^p (1 - e^{-\frac{1}{2}\ln z})^q dz = \int z^{p-\frac{1}{2}} (1 - z)^{\frac{p-1}{2}} (1 - z^{-1})^q dz.$$

Remarquons enfin que, en supposant connues les valeurs des intégrales (4) et (5) u , on en déduira facilement celles des suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} \int f(e^{ux}) dx, \\ \int f(\sin ux, \cos ux) dx, \\ \int f(\sin ux, \sin ux, \sin ux, \dots, \sin ux, \cos ux, \cos ux, \dots) dx, \\ \text{d'où pour } u = \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots \end{cases}$$

on tirera de la formule (16)

$$(17) \quad \int (1x)^n dx = x(1x)^n \left\{ 1 - \frac{n}{1x} + \frac{n(n-1)}{(1x)^2} - \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1x)^n} \right\} + C,$$

$$(18) \quad \begin{cases} \int (\arcsin x)^n dx \\ (\arcsin x)^n \end{cases} \left\{ 1 - \frac{n}{\arcsin x} + \frac{n(n-1)x}{(\arcsin x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(\arcsin x)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^4} - \cdots \right\} + C,$$

$$(19) \quad \begin{cases} \int (\arccos x)^n dx \\ (\arccos x)^n \end{cases} \left\{ 1 - \frac{n}{\arccos x} + \frac{n(n-1)x}{(\arccos x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(\arccos x)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^4} - \cdots \right\} + C,$$

$$(20) \quad \begin{cases} \int [(1+x\sqrt{1-x^2})^n] dx \\ [(1+x\sqrt{1-x^2})^n]^2 \end{cases} \left\{ 1 - \frac{n}{(1+x\sqrt{1-x^2})^2} + \frac{n(n-1)x}{(1+x\sqrt{1-x^2})^3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(1+x\sqrt{1-x^2})^4} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{x^2+1-x^2}}{(1+x\sqrt{1-x^2})^5} - \cdots \right\} + C,$$

et enfin pour les intégrales de $\sin nx$ et $\cos nx$, on obtient

Si l'on suppose que $P = n \pi/2$ et $x = 1x$, on trouverait

$$(21) \quad \int x^n (1x)^n dx = \frac{1}{n} (1x)^{n+1} \left\{ 1 - \frac{n}{1x} + \frac{n(n-1)}{(1x)^2} - \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1x)^n} \right\} + C.$$

Lorsqu'on substitue $x = r$, les formules qui précèdent deviennent

$$(22) \quad \begin{cases} \int r^n dr \\ r^n \end{cases} \left\{ 1 - \frac{n}{r} + \frac{n(n-1)}{r^2} - \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{r^n} \right\} + C,$$

$$(23) \quad \begin{cases} \int r^n \sin nr dr \\ r^n \sin nr \end{cases} \left\{ 1 - \frac{n}{r} + \frac{n(n-1)}{r^2} - \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{r^n} \right\} + C,$$

$$(24) \quad \begin{cases} \int r^n \cos nr dr \\ r^n \cos nr \end{cases} \left\{ 1 - \frac{n}{r} + \frac{n(n-1)}{r^2} - \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{r^n} \right\} + C,$$

$$(19) \quad \begin{aligned} \sqrt{\int x^n \left(\frac{d}{dx} \right)^m dx} &= \sqrt{\frac{x^{n+m}}{m+1} + C} = \sqrt{\frac{x^{n+m} - 0}{m+1} + C} \\ &= \sqrt{\frac{n! m! n! m! (n+m)!}{(n+m+1)! m! n! m!} + C} = \sqrt{\frac{n! m! (n+m)!}{(n+m+1)!} + C} \end{aligned}$$

$$\text{ou bien } \int x^n e^x dx = \frac{n! e^x}{n!} \left\{ 1 + \frac{n!}{m!} + \frac{n! m! (n+m)!}{(n+m+1)!} + \dots \right\}$$

On pourra établir directement ces dernières formules à l'aide de plusieurs intégrations par parties que l'on effectuerait de manière à diminuer sans cesse l'exposant n , pour le faire enfin disparaître. Aussi, par exemple, la formule (19) se déduit de ce qu'au moins

$$(20) \quad \begin{aligned} \int x^n e^x dx &= \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{n!} \int x^{n-1} e^x dx \\ \int x^n e^x dx &= \frac{n! e^x}{n!} + \frac{n!-1}{n!} \int x^{n-1} e^x dx \end{aligned}$$

Une remarque semblable s'applique à toutes les intégrales ci-dessus : on déduirait de l'intégrale ci-dessus supposée connue, en substituant $x = a$. L'intégration par parties peut encore servir à fixer les valeurs de

$$(21) \quad \int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx,$$

a, b désignant des quantités constantes et n un nombre entier. Aussi, par exemple, on obtiendra les valeurs générales des deux intégrales $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$ en ajoutant des termes supplémentaires arbitraires aux valeurs de ces mêmes intégrales tirées des rapports de

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx, \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

Au reste, la détermination des intégrales (21) peut être accomplie par le moyen des considérations suivantes.

Comme on a (voir la fin de la cinquième leçon)

$$d(\cos ax + \sqrt{1-a^2} \sin ax) = (\cos ax \sqrt{1-a^2} - a \sin ax) da = -a \sin ax da,$$

on en conclut

$$(33) \quad \int e^{az} \left[e^{bx} (\cosh bx + i \sinh bx) - e^{-bx} (\cosh bx - i \sinh bx) \right] dz =$$

$$(34) \quad \int e^{az} (\cosh bx + i \sinh bx) dz = \frac{e^{(a+bx)} (\cosh bx + i \sinh bx)}{a+bx} + C,$$

admettant des valeurs imaginaires. Cela posé, il est clair que les formules (33), et la formule (34) qui en est une suite nécessaire, s'obtiennent encore si l'on y remplace l'exponentielle e^{az} par le produit

$$e^{az} (\cosh bx + i \sinh bx)$$

et le diviseur a par

$$a+bx - i\epsilon.$$

On aura donc

$$(35) \quad \begin{cases} \int e^{az} e^{bx} (\cosh bx + i \sinh bx) dz \\ \text{ou} \int e^{az} e^{bx} (\cosh bx + i \sinh bx) dz = \frac{e^{(a+bx)} (\cosh bx + i \sinh bx)}{a+bx - i\epsilon} \end{cases} + C,$$

si l'on ramène le second membre de cette dernière équation à la forme $a = ax - i\epsilon$, a et ϵ désignant des quantités réelles, ces quantités seront précisément les valeurs des intégrales (33). Ces deux formules qui déterminent ces valeurs comprennent, comme cas particuliers, les équations (30), (31), (32) et (33); de plus, elles entraînent l'équation (35) et se retrouvent, si l'on suppose $n = m$, aux deux suivantes :

$$\text{Cas 1: } \int e^{az} \cosh bx dz = \frac{\cosh bx + i \sinh bx}{a^2 - b^2} e^{az} + C_1$$

$$\text{Cas 2: } \int e^{az} \sinh bx dz = \frac{i \sinh bx - \cosh bx}{a^2 - b^2} e^{az} + C_2$$

TRENTE-ET-UNIÈME LEÇON.

NOTRE DÉTERMINATION DE LA RÉDUCTION DES INÉGALITÉS EXISTANT ENTRE
LA VARIATION D'UNE FONCTION ET L'INTÉGRALE DE SES VARIATIONS EST BASEE SUR LA
PRÉCISION DE CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LA VARIATION.

Soyons p deux quantités constantes et positives. L'intégrale
de

$$\int_a^b f(x) dx = p,$$

soit pour simplifier l'écriture $\int_a^b f(x) dx = p$, cette intégrale des deux variables

$$\int_a^b \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) dx = p,$$

donc elle pourra être la dépendance entre les variables
entre lesquelles les valeurs peuvent varier. Mais il existe également
un autre type de fonction $f(x)$ qui dépend de deux variables x et y
mais ces dernières sont liées entre elles par une relation $x = g(y)$ et la variation
des deux variables dont l'une est fixe dépend de celle de l'autre, mais que
nous n'avons pas encore traitée. C'est à dire que lorsque l'une des deux variables
varie, l'autre varie avec elle.

Il existe des cas où pour la même raison que dans le cas précédent de
l'intégration tout comme celle de plusieurs autres méthodes d'intégration
cette méthode ne convient plus les mêmes. Pour ce pourquoi, il résulte de la ma-
ployer de nouveau la formule à laquelle nous avons fait faire l'application, mais

$$\int_a^b f(x) dx = p \quad \text{et} \quad \int_a^b f(y) dy = q,$$

en supposant les fonctions $f(x)$ et $f(y)$ proportionnelles à leurs différences parti-

gaines de deux des trois quantités $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, ou ce qui revient au même, de deux des trois suivantes :

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin x &= \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \cdot \frac{1}{\tan x}, \\ \cos x &= \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x \cdot \frac{1}{\tan x}. \end{aligned}$$

Conservons pour fixer les idées, que l'on veuille réduire l'intégrale $\int f(\sin x) dx$. On continuera par substitution dans cette intégrale la valeur de $d\theta$ tirée de l'une des équations

$$(5) \quad \begin{cases} d\sin x = \frac{\cos x dx}{\tan x}, \\ d\cos x = -\frac{\sin x dx}{\tan x}, \\ d\tan x = \frac{dx}{\sin x \cos x}. \end{cases}$$

puis l'on conclura de la formule (3) et (4) en supposant u proportionnel à une puissance de $\sin x$ et v à une puissance de $\cos x$,

$$\begin{aligned} \int \sin^p x \cos^q x dx &= \int u^{p-1} v^{q-1} \cos^q x d(uv) dx \\ &= \int \frac{u^{p-1} v^{q-1}}{p+q-1} \cos^q x d(uv) dx \\ &\quad + \frac{p-1}{p+q-1} \int u^{p-2} v^{q-1} \cos^{q-1} x d(uv) dx. \end{aligned}$$

$$(6) \quad \int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{u^{p-1} v^{q-1}}{p+q-1} + \frac{p-1}{p+q-1} \int \sin^{p-2} x \cos^{q-1} x dx$$

et en supposant u proportionnel à une puissance de $\cos x$ et v à une puissance de $\sin x$,

$$(7) \quad \int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\sin^{p-1} x \cos^{q-1} x}{p+q-1} + \frac{1}{p+q-1} \int \sin^{p-2} x \cos^q x dx.$$

Po en supposant u proportionnel à une puissance de $\tan x$ et v à une

(8) RÉSUMÉ DES RÉGLES SUR LE CALCUL INTÉGRALE

puissance de cos α ,

$$\begin{aligned} \text{fonction constante} &= \int \text{fonction constante} dx \\ &= \int \frac{\text{fonction constante}}{p-1} \cdot (p-1) dx \\ &= \text{fonction constante} \int \frac{1}{p-1} dx = \frac{1}{p-1} \int \text{fonction constante} dx, \\ (3) \quad \text{fonction constante} &= \frac{\text{fonction constante}}{p-1} \int \text{fonction constante} dx, \end{aligned}$$

ou en supposant a proportionnel à une puissance de x , et b à une puissance de $\sin x$,

$$\text{fonction constante} = \frac{\text{fonction constante}}{p-1} \int \text{fonction constante} dx.$$

Et en supposant a proportionnel à une puissance de x et b à une puissance de tang x ,

$$\begin{aligned} \text{fonction constante} &= \text{fonction constante} \int \text{fonction constante} dx \\ &= \int \frac{\text{fonction constante}}{p-1} \cdot \text{fonction constante} dx \\ &= \text{fonction constante} \int \frac{1}{p-1} dx = \frac{1}{p-1} \int \text{fonction constante} dx, \\ (4) \quad \text{fonction constante} &= \frac{\text{fonction constante}}{p-1} \int \text{fonction constante} dx, \end{aligned}$$

ou en supposant a proportionnel à une puissance de x et b à une puissance de $\cot x$,

$$(5) \quad \text{fonction constante} = \frac{\text{fonction constante}}{p-1} \int \text{fonction constante} dx.$$

A l'aide des formules (8), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) et (10), on peut sans toujours transformer l'intégrale en une autre intégrale, dériver toutes les espions, mais dans laquelle chacune des quantités a et b a un exposant compris entre les limites -1 et $+1$. En effet, pour atteindre ce but, il suffira d'employer une ou plusieurs fois les deux formules (8) et (3), ou du moins l'une d'entre elles, et bien égale-

sont p et q sont positifs, ou si l'un d'eux étant positif, l'autre est compris entre les limites 0 et 1 . On devra, au contraire, employer les formules (16) et (17) si les exposants p et q sont tous deux négatifs, ou si l'un d'eux étant négatif, l'autre est compris entre les limites 0 et 1 . Enfin, si l'un des deux exposants étant positif, mais supérieure à l'unité, l'autre est négatif, mais inférieur à -1 , on fera servir la formule (6) ou la formule (7) à la réduction simultanée des valeurs numériques de ces deux exposants, jusqu'à ce que l'un d'eux se trouve remplacé par une quantité comprise entre les limites -1 et $+1$.

Dans le cas particulier où l'on suppose $p + q = 0$, les équations (6) et (7) deviennent

$$(18) \quad \begin{aligned} \sqrt{\int f \tan^p x dx} &= \frac{\tan^{p+1} x}{p+1} - \int f \tan^{p+1} x dx, \\ \int f \cot x dx &= \frac{\cot^{q+1} x}{q+1} - \int f \cot^{q+1} x dx. \end{aligned}$$

Lorsque les exposants p et q ont des valeurs numériques entières, alors, en opérant comme il a été dit ci-dessus, on finit par réduire chacun d'eux à l'une des trois quantités $+1$, 0 , -1 , et l'intégrale (1) se trouve nécessairement remplacée par l'une des neuf suivantes :

$$\begin{aligned} \int dx &= x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \sin 2x + C, \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= -\ln |\csc x + \cot x| + C, & \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln |\sec x + \tan x| + C, \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{2} \cot x + C, & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \frac{1}{2} \tan x + C, \\ \int \frac{dx}{\sin x \cos x} &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C, & \int \frac{dx}{\cos x \sin x} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C, \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} \right| + C, & \int \frac{dx}{\sin x \cos x \sin^2 x} &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) + C, \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C, & \int \frac{dx}{\cos x \sin x \cos^2 x} &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

D'abord, il est clair qu'on réduira l'intégrale $\int \sin^{-m}x \cos^{-n}x dx$ à d'autres plus simples en multipliant une ou plusieurs fois la fonction sous le signe \int par $\sin^2x + \cos^2x = 1$. De plus, on peut rendre rationnelle l'expression différentielle $\sin^{\pm m}x \cos^{\pm n}x dx$: 1^o dans le cas où n est un nombre impair, en posant $\sin x = z$; 2^o dans le cas où m est un nombre impair, en posant $\cos x = z$. Remarquons enfin que l'on obtiendra très facilement les valeurs des intégrales

$$\int \sin^m x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x dx$$

dès qu'on aura développé $\sin^m x$, $\cos^n x$ et $\sin^m x \cos^n x$ en fonctions linéaires de $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ..., $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ... à l'aide des formules établies dans le Chapitre VII de l'*Analyse algébrique* (1).

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 153.

186. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LES TABLES INÉDITES

Si l'on applique ces principes à la détermination des intégrales

$$\int \sin^n x dx = \int \cos^n x dx$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx = \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = I_{n,m} + I_{m,n}$$

n étant un nombre entier, on trouve :

| $\int \sin^n x dx$ | $\frac{\sin x}{n} \left[\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \sin^{n-3} x + \dots \right] + C$ | cas où $n > 0$, n pair |
|-----------------------------|---|---------------------------|
| $\int \cos^n x dx$ | $\frac{\cos x}{n} \left[\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cos^{n-3} x + \dots \right] + C$ | cas où $n > 0$, n pair |
| $\int \tan^n x dx$ | $\frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \frac{\tan^{n-5} x}{n-5} - \dots + C$ | |
| $\int \cot^n x dx$ | $\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} + \frac{\cot^{n-5} x}{n-5} - \dots + C$ | |
| $\int \sec^n x dx$ | $\frac{\sec^{n-1} x}{n-1} - \frac{\sec^{n-3} x}{n-3} + \frac{\sec^{n-5} x}{n-5} - \dots + C$ | |
| $\int \csc^n x dx$ | $\frac{\csc^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \ln \sec x + C$ | |
| $\int \cos^n x \sin^m x dx$ | $\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \left[\sin^{m+1} x + \frac{m+1}{n-1} \sin^{m-1} x + \dots \right] + C$ | |

ou en supposant *n* impair.

| $\int \sin^n x dx$ | $\frac{\sin x}{n} \left[\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \sin^{n-3} x + \dots \right] + C$ | cas où $n > 0$, n impair |
|-----------------------------|---|-----------------------------|
| $\int \cos^n x dx$ | $\frac{\cos x}{n} \left[\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cos^{n-3} x + \dots \right] + C$ | cas où $n > 0$, n impair |
| $\int \tan^n x dx$ | $\frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \frac{\tan^{n-5} x}{n-5} - \dots + C$ | |
| $\int \cot^n x dx$ | $\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} + \frac{\cot^{n-5} x}{n-5} - \dots + C$ | |
| $\int \sec^n x dx$ | $\frac{\sec^{n-1} x}{n-1} - \frac{\sec^{n-3} x}{n-3} + \frac{\sec^{n-5} x}{n-5} - \dots + C$ | |
| $\int \csc^n x dx$ | $\frac{\csc^{n-1} x}{n-1} - \frac{n-1}{n-1} \ln \sec x + C$ | |
| $\int \cos^n x \sin^m x dx$ | $\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \left[\sin^{m+1} x + \frac{m+1}{n-1} \sin^{m-1} x + \dots \right] + C$ | |

Nous indiquons, en finissant, plusieurs méthodes également
à connaitre les précédentes, à la reduction ou à la décomposition
d'une intégrale $\int \sin^n x \cos^m x dx$, *n*, *m* étant deux nombres entiers.

D'abord, il est clair qu'on réduira l'intégrale $\int \sin^n x \cos^m x dx$ à d'autres plus simples en multipliant une ou plusieurs fois la fonction sous le signe \int par un terme $-\cos x dx$. De plus, on peut rendre rationnelle l'expression différentielle $\sin^n x \cos^m x dx$ en x^n dans le cas où n est un nombre impair, en posant $\sin x = z^m$ dans le cas où m est un nombre impair, en posant $\cos x = z^n$. Remarquons enfin que l'on obtient très facilement les valeurs des intégrales

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{(-1)^m}{m+1} \int \sin^{n-m-1} x d(\cos x)$$

dès qu'on aura développé $\sin x$ et $\cos x$ en fonctions linéaires de $\sin x$ et $\cos x$, puisque, comme on voit, cette intégrale à l'aide des formules établies dans le Chapitre VII de l'*Analysis algébrique* s'écrit

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{(-1)^m}{m+1} \int \sin^{n-m-1} x d(\cos x).$$

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

SÉRIE DE PASSAGE DES INÉGALITÉS PROBLÉMATIQUES À LA SÉRIE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

Intégrer l'équation

(1)
$$dx = f(x) + dy,$$

on l'expression différentielle $f(x)dx$, à partir de $x = x_0$, c'est-à-dire une fonction continue de x qui ait la double propriété de donner pour différentielle $f(x)dx$ et de s'évanouir pour $x = x_1$. Cette fonction devait être comprise dans le terme général

$$\int f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + C,$$

se réduira nécessairement à l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, si la fonction $f(x)$ est elle-même continue par rapport à x , c'est-à-dire si les deux bornes de cette intégrale. Conservons toutefois que, lorsque toutes deux x_0 et x_1 et y_0 et y_1 sont continues entre ces limites, la valeur φ de x déterminée par l'équation (1), soit présentée sous la forme

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(x)dx.$$

La fonction cherchée sera évidemment égale à

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

En partant de cette remarque, on verra sans peine où sont tirées toutes les formules établies dans les Leçons précédentes. Il ne faut pas oublier que dans ces dernières, lorsque il s'agit d'établir certaines relations

donnée de x . Ainsi, par exemple, on reconnaîtra facilement que les équations (9) et (10) de la vingt-septième leçon, savoir

$$\int f(x) dx = \int f(z) dz - u - \int u' dz = ue^{-z} \int v' dz$$

où

$$\int ue^z dz = ue^{-z} \int e^z dz$$

entraînent les suivantes:

$$(9) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

et

$$(10) \quad \int_{x_0}^x ue^x dx = ue^{-x_0} - u_0 e^{-x_0} - \int_{x_0}^x e^x dz,$$

x_0 , u_0 et e_0 désignant les valeurs de x , u et e correspondantes à $x = x_0$. Si, dans les formules (9) et (10), on pose $x = X$, on trouvera, en apposant Z , E , V les valeurs correspondantes de z , u , e ,

$$(9) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{z_0}^Z f(z) dz$$

et

$$(10) \quad \int_{x_0}^X ue^x dx = EV - u_0 e^{-x_0} - \int_{x_0}^X e^x dz.$$

Les équations (9) et (10) sont celles que l'on doit substituer aux formules (9) et (10) de la vingt-septième leçon, lorsqu'il s'agit d'appliquer l'intégration par substitution ou par parties à l'évaluation ou à la réduction des intégrales définies; tandis que les intégrales de cette espèce, déduites de l'intégration immédiate ou par décomposition, sont données par la formule (18) de la vingt-sixième leçon, ou par la formule (19) de la vingt-troisième. Ces principes étant admis, les méthodes exposées dans les leçons précédentes pourront servir à déterminer un grand nombre d'intégrales définies, parmi lesquelles je vais citer quelquesunes des plus remarquables.

Si l'on désigne par m un nombre entier, par a, b, g, y des quantités

190 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINIMENT

positives, par α, A, B, C, \dots des quantités quelconques, cette par un nombre infiniment petit, on tirera des formules établies dans les vingt-septième et vingt-huitième leçons.

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \Big|_a^b = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha b} - \frac{1}{\alpha} e^{\alpha a}, \\ \int_a^b e^{\alpha x} dx &= \alpha \int_a^b e^{\alpha x} dx + \alpha_a = \int_a^b (\alpha e^{\alpha x}) dx + \alpha_a, \\ \int_a^b (A + Bx + Cx^2) dx &= \int_a^b A dx + A \frac{b-a}{2} + B \frac{(b-a)^2}{2} + C \frac{(b-a)^3}{3}, \\ \int_a^b \frac{dx}{e^{-\alpha x}} &= -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_a^b = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha a}, \\ \int_a^b \frac{dx}{e^{-\alpha x} w} &= -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{dx}{e^{-\alpha x} w} = -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{dx}{w e^{-\alpha x}} = -\frac{1}{\alpha w}, \\ \int_a^b \frac{dx}{e^{-\alpha x} w^2} &= -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{dx}{e^{-\alpha x} w^2} = -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{dx}{w^2 e^{-\alpha x}} = -\frac{1}{\alpha w^2}, \\ \int_a^b \frac{dx}{(e^{-\alpha x} w)^p} &= -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{dx}{(e^{-\alpha x} w)^p} = -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{dx}{w^p e^{-\alpha x(p+1)}} = -\frac{1}{\alpha w^p}, \\ \int_a^b \left(\frac{A - BW}{e^{-\alpha x} w} \right) dx &= -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \left(\frac{A - BW}{e^{-\alpha x} w} \right) dx = -\frac{1}{\alpha} \int_a^b \frac{(A - BW) dx}{w e^{-\alpha x}} = -\frac{1}{\alpha w}, \\ \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} \left(\frac{A - BW}{e^{-\alpha x} w} \right) dx &= -\frac{1}{\alpha} \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} \left(\frac{A - BW}{e^{-\alpha x} w} \right) dx = -\frac{1}{\alpha} \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} \frac{(A - BW) dx}{w e^{-\alpha x}} = -\frac{1}{\alpha w}, \end{aligned}$$

De plus, si l'on représente généralement par $\frac{f(x)}{g(x)}$ une fraction rationnelle

respondantes à ces racines, on obtiendra la formule

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)}{F(x)} dx = \pi(A_1 + A_2 + \dots) I_{\frac{m}{2}}^B + \pi(B_1 + B_2 + \dots)$$

Le second membre de cette formule cesserá de renfermer le facteur arbitraire $I_{\frac{m}{2}}^B$, et l'on aura en conséquence

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)}{F(x)} dx = \pi(B_1 + B_2 + \dots)$$

toutes les fois que la somme $A_1 + A_2 + \dots$ s'évanouira. On cette condition sera remplie si le degré de $F(x)$ surpassé au moins de deux unités le degré de $f(x)$. On arrive au même résultat en partant de la remarque qui termine la vingt-cinquième Légion.

Si le degré de la fonction $F(x)$ surpassait d'une unité seulement celui de $f(x)$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)}{F(x)} dx$ deviendrait indéterminée, et sa valeur générale, donnée par l'équation (6), renfermerait la constante arbitraire $I_{\frac{m}{2}}^B$. Mais, en réduisant cette constante arbitraire à l'unité, on retrouverait l'équation (7), qui, dans ce cas, fournittrait seulement la valeur principale de l'intégrale en question. Ajoutons que cette valeur principale resterait la même, si, entre les racines imaginaires x_1, x_2, \dots , l'équation $F(x) = 0$ admettait des racines réelles. La raison en est que toutes les intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)}{x^n - a} dx$ ont des valeurs principales nulles.

Exemple. Soient m et n deux nombres entiers, m étant > n . Si

on fait $\frac{x^{m+1}-a}{x^n-a}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m+1} dx}{x^n - a} &= \frac{1}{na} \left[\text{sign}(n-m) \cdot \sin(n\pi) + \text{sign}(m-n) \cdot \sin(m\pi) \right] \\ &= \frac{\pi}{na \sin(n\pi)} - \frac{\pi}{na \sin(m\pi)} \end{aligned}$$

192. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INTÉGRALE FINIE.

On en conclut, en posant $x = u^{m/n}$,

$$(8) \quad \int_0^x \frac{x^{m-1} dx}{(1-x^n)^{1/m}} = m \int_0^{u^{1/n}} \frac{t^{m-1} dt}{(1-t^n)^{1/m}} = m \int_{u^{-1/n}}^1 \frac{t^{m-1} dt}{(t^n-1)^{1/m}}.$$

De même, en réduisant chaque intégrale indéfinie aux racines principales, on trouvera

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x^{m-1} dx}{(1+x^n)^{1/m}} &= \frac{m}{n} \left[\sin nx + n \operatorname{sh} nx - n \operatorname{ch} nx - \operatorname{sinh} nx \right] \\ (9) \quad \int_0^x \frac{x^{m-1} dx}{(1-x^n)^{1/m}} &= -m \int_0^{u^{1/n}} \frac{t^{m-1} dt}{(1-t^n)^{1/m}} = m \int_{u^{-1/n}}^1 \frac{t^{m-1} dt}{(t^n-1)^{1/m}}. \end{aligned}$$

On déduira encore des formules établies dans les deuxièmes et troisième Leçons

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x^{m-1} dx}{(1+x^2)^{1/2}} &= \frac{m}{2} \int_0^{x^2} \frac{t^{m-2} dt}{(1+t)^{1/2}} \\ &= \frac{(m-1)(m-3)\dots(1)}{(m-2)(m-4)\dots(2)} \int_0^{x^2} \frac{dt}{(1+t)^{(m+1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \int_0^{x^2} \frac{dt}{(1+t^{m+1})^{1/2}}, \\ \int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{dt}{(1+t)^{1/2}} = \frac{\operatorname{arctan} x}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{dt}{(1+t^{m+1})^{1/2}}, \\ \int_0^x \operatorname{arctan} x dx &= x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{dt}{(1+t^{m+1})^{1/2}}, \\ \int_0^x \operatorname{sh} x dx &= \frac{x^{m+1}-1}{m+1}, \\ \int_0^x \operatorname{ch} x dx &= \frac{x^{m+1}+1}{m+1}, \\ \int_0^x \operatorname{cosh} x dx &= \frac{1}{m+1} \left[\frac{x^{m+1}-1}{\operatorname{sh}^{m+1} \frac{x}{2}} \right], \\ \int_0^x \operatorname{cosh} x \operatorname{tanh} x dx &= \frac{1}{m+1} \left[\frac{x^{m+1}-1}{(\operatorname{sh}^{m+1} \frac{x}{2})^2} \right], \\ \int_0^x \operatorname{cosh} x \operatorname{coth} x dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1}, \\ \int_0^x \operatorname{cosh} x \operatorname{sinh} x dx &= \frac{1}{m+1} \left[\frac{x^{m+1}-1}{\operatorname{ch}^{m+1} \frac{x}{2}} \right], \\ \int_0^x \operatorname{cosh} x \operatorname{sinh} x dx &= \frac{1}{m+1} \left[\frac{b^{m+1}-1}{\operatorname{ch}^{m+1} \frac{x}{2}} \right]. \end{aligned}$$

afin, on tirera des formules établies dans la trente et unième leçon, en supposant n pair.

$$\int_a^b \sin^n x dx = \frac{(-1)^n}{(1,3,5,\dots,n-1)n} \pi - \int_a^b \cos^n x dx,$$

$$\int_a^b \tan^n x dx = \frac{(-1)}{n-1} + \frac{(-1)}{n-3} x^{3-n} + \frac{(-1)}{n-5} x^{5-n} + \dots + \frac{(-1)}{4}$$

et en supposant n impair.

$$\int_a^b \sin^n x dx = \frac{(-1)^n}{(1,3,5,\dots,n-1)n} \int_a^b \cos^n x dx,$$

$$\int_a^b \tan^n x dx = \frac{(-1)}{n-1} + \frac{(-1)}{n-3} x^{3-n} + \frac{(-1)}{n-5} x^{5-n} + \dots + \frac{(-1)}{n-2}$$

Les méthodes d'intégration que nous avons indiquées fournissent souvent les moyens de transformer une intégrale définie donnée en une autre plus simple. Ainsi, par exemple, quelle que soit la fonction $p(x)$, on tirera des formules établies dans la vingt-septième leçon

$$(m) \quad \begin{cases} \int_a^b p(x) e^{-px} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{p} \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{p} \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b p(x) e^{-px} dx = \frac{1}{p^2} \int_a^b x^2 e^{-px} dx \\ \int_a^b \frac{dx}{p(x)} = \int_a^b \frac{dx}{x} \end{cases}$$

Lorsque, dans une intégrale relative à la variable x , la fonction sous le signe \int renferme une autre quantité p , dont la valeur est arbitraire, on peut considérer cette quantité p comme une nouvelle variable, et l'intégrale elle-même comme une fonction de p . Parmi les

195. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉ ESTIMATIF

fonctions de cette espèce, on doit remarquer celle que M. Legendre a désignée par la lettre P , et qui, pour des valeurs positives de n , se trouve définie par l'équation

$$(1) \quad P(p) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{p-1} dx = \int_0^{\infty} z^{p-1} e^{-az} dz.$$

Cette fonction, dont Euler et M. Legendre se sont beaucoup occupés, satisfait, en vertu de ce qui précède, aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} P(0) = 1, \quad P(n) = n!, \quad P(3) = 3\pi, \quad \dots, \quad P(n) = \Gamma(n+1), \\ \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} dz = \frac{P(n)}{a^n}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} \cosh bz dz = \frac{P(n) \cos \left(n \operatorname{arc tanh} \frac{b}{a} \right)}{(a^2 + b^2)^n}, \\ \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} \sinh bz dz = \frac{P(n) \sin \left(n \operatorname{arc tanh} \frac{b}{a} \right)}{(a^2 + b^2)^n}. \end{cases}$$

$$(4) \quad \int_0^{\infty} z^{p-1} e^{-az} dz = \frac{P(p)}{a^p}, \quad \int_0^{\infty} x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m) V_{m+1}}{\Gamma(m+1)}.$$

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE \int , INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES QUI RENFERMENT PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Soient x, y deux variables indépendantes, $f(x, y)$ une fonction de ces deux variables, et x_0, X deux valeurs particulières de x . On trouvrà, en posant $\Delta y = \alpha dy$ et employant les notations adoptées dans la treizième Leçon,

$$\Delta_x \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X f(x, y + \Delta y) dx - \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X \Delta_y f(x, y) dx,$$

puis, en divisant par αdy et faisant converger α vers la limite zéro,

$$(1) \quad \frac{d}{dy} \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

On aura de même

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^y f(x, y) dy = \int_{x_0}^y \frac{df(x, y)}{dx} dy.$$

Il suit de ces formules que, pour différentier par rapport à y les intégrales $\int_{x_0}^X f(x, y) dx$, $\int_{x_0}^y f(x, y) dy$, il suffit de *differentier sous le signe* \int la fonction $f(x, y)$. Il en résulte encore que les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \beta(x), \\ \int_{x_0}^y f(x, y) dy = \beta(x, y), \\ \int f(x, y) dx, : \beta(x, y) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

196. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINIMENT

fonctions de cette espèce, on doit remarquer celle que M. Legendre désignée par la lettre L , et qui pour des valeurs particulières de a , se trouve définie par l'équation

$$(1) \quad \text{Euler} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x} \right)^{a-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx.$$

Cette fonction, dont Euler et M. Legendre en ont donné diverses propriétés, satisfait, en vertu de ce qui précéde, aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Euler} & \text{Legendre} \\ \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} & \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} & \text{Legendre} \\ \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} & \text{Euler} \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} & \text{Legendre} \\ \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} & \text{Euler} \end{cases}$$

$$(5) \quad \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)}$$

dans lesquelles a désigne un nombre suffisamment petit pour que le réel inférieur à a , et x un réel quel que soit.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE \int , INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES QUI CONPRENnT PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Soyent x, y deux variables indépendantes, $f(x, y)$ une fonction de ces deux variables, et x_0, X deux valeurs particulières de x . On trouvera, en posant $\Delta y = dy$ et employant les notations adoptées dans la treizième leçon,

$$\delta_y \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X f(x, y + \Delta y) dx - \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X \Delta y f(x, y) dx,$$

puis, en divisant par Δy et faisant converger Δy vers la limite zéro,

$$(1) \quad \frac{d}{dy} \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

On aura de même

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^y f(x, y) dy = \int_{x_0}^y \frac{df(x, y)}{dy} dy.$$

Il suit de ces formules que, pour différentier par rapport à y les intégrales $\int_{x_0}^X f(x, y) dx$, $\int_{x_0}^y f(x, y) dy$, il suffit de *differentier sous le signe* \int la fonction $f(x, y)$. Il en résulte encore que les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \hat{\sigma}(y), \\ \int_{x_0}^y f(x, y) dy = \hat{\sigma}(x, y), \\ \int^y f(x, y) dy = \hat{\sigma}(x, y) + \odot \end{cases}$$

196. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL
entraînent toujours les suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{a_1}^{A_1} \frac{dt f(x_1, t)}{dy} dt = \frac{d f(x_1, y)}{dy}, \\ \int_{a_1}^{A_1} \frac{d^2 f(x_1, t)}{dy^2} dt = \frac{d^2 f(x_1, y)}{dy^2}, \\ \int_{a_1}^{A_1} \frac{d f(x_1, t)}{dx} dt = \frac{d f(x_1, y)}{dx}. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{a_1}^{A_1} \frac{d^2 f(x_1, t)}{dx^2} dt = \frac{d^2 f(x_1, y)}{dx^2}, \\ \int_{a_1}^{A_1} \frac{d^3 f(x_1, t)}{dx^3} dt = \frac{d^3 f(x_1, y)}{dx^3}, \\ \int_{a_1}^{A_1} \frac{d^4 f(x_1, t)}{dx^4} dt = \frac{d^4 f(x_1, y)}{dx^4}. \end{cases}$$

Exemples. — En différentiant n fois de suite par rapport à la variable x chacune des intégrales

$$\int_a^x \frac{dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_a^x \frac{dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_a^x e^{-ar} dr, \quad \int_a^x e^{-ar} dr = \int_a^x e^{-ar} e^{-ar} dr,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(r^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) = -\frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \\ \int_a^x \frac{(r^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{r}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \int_a^x \frac{dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{a} \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \\ \int_a^x r^2 e^{-ar} dr &= \frac{d^2(a^{-1} e^{-ar})}{dr^2} = -a^2 a^{-1} e^{-ar}, \\ \int_a^x r^m e^{-ar} dr &= -\frac{d(m+1)(a^{-1} e^{-ar})}{dr^m} = -\frac{1+m}{a^m} a^{-1} e^{-ar}, \\ \int_a^x r^m a^{-1} e^{-ar} dr &= \frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{a^{m+1}} \Gamma(p+1), \end{aligned}$$

$$p(p+1)\cdots(p+m-1) \Gamma(p+1)$$

Concevons maintenant que la fonction $f(x, y)$ soit continue par rapport aux deux variables x et y , toutes les fois que x reste compris entre les limites x_0 , X , et y entre les limites y_0 , Y . Il est aisé de voir que, pour de semblables valeurs de x et de y , la seconde des équations (3) entraînera la suivante :

$$(6) \quad \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(x, y) dy dx = \int_{y_0}^y g(x, y) dy = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(x, y) dy dx.$$

En effet, on tirera de la formule (2)

$$\frac{d}{dy} \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(x, y) dx dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

puis, en multipliant les deux membres par dy et les intégrant par rapport à y , à partir de $y = 0$, on retrouvera la formule (6). On aura par suite

$$(7) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y f(x, y) dx dy = \int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y f(x, y) dy dx, \\ \int_{y_0}^Y \int_{x_0}^X f(x, y) dx dy = \int_{y_0}^Y \int_{x_0}^X f(x, y) dy dx. \end{cases}$$

Il résulte des formules (6) et (7) que, pour intégrer par rapport à y , et à partir de $y = y_0$, les expressions $\int_{x_0}^x f(x, y) dx$, $\int_{x_0}^y f(x, y) dx$, multipliées par la différentielle dy , il suffit d'intégrer sous le signe \int' , et à partir de $y = y_0$, la fonction $f(x, y)$ multipliée par cette même différentielle.

Souvent l'intégration sous le signe \int' fait connaître les valeurs de certaines intégrales définies, quoique l'on n'ait aucun moyen d'évaluer les intégrales indéfinies correspondantes. Ainsi, quoique l'on ne saache pas déterminer en fonction de x l'intégrale indéfinie $\int x^{p_1} \cdots x^{q_1} dx$ (p_1, q_1 étant deux quantités positives), néanmoins, comme on a généralement, pour des valeurs positives de p_1 ,

$$(8) \quad \int_0^1 x^{p_1-1} dx = \frac{1}{p_1},$$

198 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINIMENTESIMAL
on en conclut, en multipliant les deux membres à part d'un, puis intégrant par rapport à p , à partir de $p = 0$,

$$(9) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-px} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx = \Gamma(a)$$

Parmi les formules de ce genre, on doit remarquer celle-ci celle que nous allons établir.

Si l'on désigne par a, b, c des quantités positives, une intégration sous le signe \int , relative à la quantité x , effectuée au point de $x = 0$ et appliquée aux intégrales définies

$$(10) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx & = \frac{1}{a}, \\ \int_0^{\infty} e^{-ax} \cosh bx dx & = \frac{a}{a^2 - b^2}, \\ \int_0^{\infty} e^{-ax} \sinh bx dx & = \frac{b}{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

produira les formules

$$(11) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx & = \Gamma(a), \\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cosh bx dx & = \Gamma(a) + \frac{b}{a^2 - b^2}, \\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sinh bx dx & = \operatorname{arctanh} \frac{ab}{a^2 + b^2} - \text{arctanh} \frac{b}{a}. \end{cases}$$

desquelles on tirera, en posant $c = 0$ et $a = \alpha$,

$$(12) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \cosh \alpha x = \infty, \quad \int_0^{\infty} \cos bx \frac{dx}{x} = \pi, \quad \int_0^{\infty} \sin bx \frac{dx}{x} = 0.$$

De plus, comme on a, pour des valeurs positives de b (voir la trente-deuxième Leçon),

$$\int_0^{\infty} z^{b-1} e^{-z(1+x)} dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b}$$

et, par suite,

$$\frac{x^{b-1}}{(1+x)^b} \Gamma(b) \int_0^{\infty} z^{b-1} e^{-zx} z^{b-1} e^{-zx} dz =$$

on en conclura, en supposant a et b positifs, ainsi que $b > a$,

$$(13) \quad \int_a^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(x+c)^b} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} z^{b-a-1} e^{-cz} dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)},$$

puis en faisant $b = n$, prenant pour a un nombre de la forme $\frac{m+1}{m}$, et ayant égard à l'équation $\Gamma(n) = 1$, on trouvera [voir la formule (8), trente-deuxième leçon]

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\Gamma(a)\Gamma(n-a)}{\Gamma(n)} \sin \frac{\pi a}{m} \\ (\Gamma(n))^2 - a^n = \Gamma(n) \cdot a^{\frac{1}{m}} \int_0^{\infty} z^{\frac{n-1}{m}} e^{-az} dz = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx. \end{cases}$$

Soient maintenant $\varphi(x,y)$, $\gamma(x,y)$ deux fonctions propres à vérifier l'équation

$$(15) \quad \frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \frac{dy(\varphi,x)}{dx}.$$

Si l'on substitue successivement les deux membres de cette équation à la place de $f(x,y)$ dans la formule (1), on obtiendra la suivante :

$$(16) \quad \int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x,y_0) - \varphi(x_0,y_0)] dx = \int_{y_0}^{y_1} [\gamma(x,y) - \gamma(x_0,y)] dy.$$

Celle-ci subsiste toutes les fois que les fonctions $\varphi(x,y)$, $\gamma(x,y)$ restent l'une et l'autre finies et continues par rapport aux variables x et y , entre les limites des intégrations.

Conservons à présent que l'on cherche une fonction de n propre à vérifier l'équation

$$(17) \quad du = \varphi(x,y) dx + \gamma(x,y) dy$$

on, ce qui revient au même, les deux suivantes :

$$(18) \quad \frac{du}{dx} = \varphi(x,y),$$

$$(19) \quad \frac{du}{dy} = \gamma(x,y).$$

200 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINIMENT PETIT.

On ne pourra, évidemment, s'assurer que dans le cas de l'équation (13), dont chaque membre sera exprimé de la forme $\int_{x_1}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_2$, l'équation sera bien établie. Cela sera toutefois évidemment satisfait si l'on suppose cette condition vérifiée; on résoudra facilement le problème proposé. En effet, nous devons trouver des valeurs particulières de x_1, x_2 , et une condition suffisante. Pour vérifier l'équation (13), il suffira de prendre

$$(14) \quad a = \int_{x_1}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_2 = c x_2$$

désignant une fonction arbitraire de x_2 et supposant que la limite de la fonction c est

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(x_1, x_2)}{dx_2} dx_2 = \frac{dy}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(x_1, x_2)}{dx_2} dx_2 = \frac{dy}{dx}$$

Il est clair qu'on vérifie la condition d'égalité entre les deux membres

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = f(x_1, x_2) = a = \int a(x_1, x_2) dx_2 = \int a(x_1, x_2) dx_2$$

Par conséquent, le calcul donne

$$(16) \quad \begin{cases} a = \int_{x_1}^{x_2} g(x_1, x_2) dx_2 = \int g(x_1, x_2) dx_2 \\ \int_{x_1}^{x_2} g(x_1, x_2) dx_2 = \int_{x_1}^{x_2} g(x_1, x_2) dx_2 = 0 \end{cases}$$

Lorsque, dans les équations précédentes, on remplace x_1 et x_2 par les variables x_1, x_2 , on obtient une seconde valeur de la fonction a en fonction avec la première, en vertu de la formule (16).

On intégrerait avec la même facilité la différentielle d'une fonction de trois, quatre, ... variables indépendantes, et l'on pourrait alors poser

exemple que si les conditions

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dy(x_0, r, z)}{dr} = \frac{d\psi(x_0, r, z)}{dr}, \\ \frac{d\phi(x_0, r, z)}{dr} = \frac{d\gamma(x_0, r, z)}{dr}, \\ \frac{d\gamma(x_0, r, z)}{dr} = \frac{d\chi(x_0, r, z)}{dr} \end{cases}$$

se trouvent remplies, la valeur générale de u propre à vérifier l'équation

$$(4) \quad du = \chi(x_0, y_0, z_0) dr + \gamma(x_0, y_0, z_0) dy + \phi(x_0, y_0, z_0) dz$$

est

$$(5) \quad u = \int_{r_0}^{r_1} \chi(x_0, y_0, z_0) dr + \int_{y_0}^{y_1} \gamma(x_0, y_0, z_0) dy + \int_{z_0}^{z_1} \phi(x_0, y_0, z_0) dz + C,$$

x_0, y_0, z_0 désignant des valeurs particulières des variables x, y, z .

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

COMPARAISON DES DEUX APPROXIMATIONS MÉTHODES D'INTEGRATION
PRINCIPES DE LA MÉTHODE D'INTEGRATION

Concevons que l'opération τ de la leçon précédente soit nulle. Si l'on intègre deux fois cette équation, savant bien faire pour l'application entre les limites x_0, X , et une fois par l'opérateur τ , entre les limites x_0, X , on trouvera :

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x_0+X} \{x(x, X) - x(x, x_0)\} dx = \int_{x_0}^X \{x(X, x) - x(x, x_0)\} dx.$$

Cette dernière formule établit une relation étroite entre les intégrales qu'elle renferme. Mais elle n'est pas tout à fait complète : les fonctions $\rho(x, x_0), \rho(x, X)$ dépendent indirectement d'une autre générale : le système de valeurs de x et de X comparables. Ces dernières sont toutes deux $x_0, X, x_0 + x, X$. Intégrons l'équation d'abord après avoir ajouté deux termes qui réduisent à un seul, savoir $x - x_0$ et $X - x_0$. Dans l'ordre que nous avons choisi, expressions deduites par une note gravée ci-dessous. On obtient des intégrales de la formule (1') et trente-trois autres. Les deux premières sont égales par l'hypothèse. Mais elles redéfinissent tout temps x par $x = x_0 + t$, et doivent être remplacées par $x = x_0 + t$ dans l'intégration. Cela est possible si t est suffisamment petit. L'équation (1) devra être modifiée. En effet, en faisant disparaître pour x l'expression $x = x_0 + t$, on trouvera, dans l'hypothèse sur τ admette :

$$(1') \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_0+X} \{x(x, X) - x(x, x_0)\} dx = \int_{x_0}^X \{x(X, x) - x(x, x_0)\} dx \\ \int_{x_0}^{x_0+X} \{x(X, x) - x(x, x_0) + x(x, X) - x(x, x_0)\} dx = \int_{x_0}^X \{x(X, x) - x(x, x_0) + x(x, X) - x(x, x_0)\} dx. \end{cases}$$

puis l'on en conclura, en faisant converger ε vers la limite zéro,

$$(3) \quad \int_{x_0}^X [\varphi(x, Y) - \varphi(x_0, x_0)] dx = \int_{x_0}^X [\chi(X, x) - \chi(x_0, x)] dx = \Delta,$$

la valeur de Δ étant déterminée par la formule

$$(4) \quad \Delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^X [\chi(u + \varepsilon, y) - \chi(u - \varepsilon, y)] dy.$$

Dans le cas général, Δ sera la somme de plusieurs termes semblables au second membre de l'équation (3).

Exemple. — Si l'on pose

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\lambda}{\rho(x, y)} e^{-\lambda y} = \chi(x, y) = e^{\frac{-y}{1 + y}} \\ x_0 &= 0 & X = 1, \\ x &= u & y = \frac{1}{1 + u}, \end{aligned}$$

les équations (3) et (4) donneront

$$\int_{x_0}^X \frac{dx}{e^{-\lambda x}} = \int_{x_0}^X \frac{du}{e^{-\lambda u}} = \Delta, \quad \Delta = \Delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^X \frac{du}{e^{(1+u)\varepsilon}} = 3\pi.$$

Il est facile de voir que les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\chi(x, y)$ vérifieront l'équation (1) de la trentet-unième leçon, si l'on a

$$\varphi(x, y) dx + \varphi(x, y) dy = f(u) du$$

et, par suite,

$$(5) \quad \varphi(x, y) = f(u) \frac{du}{dx} = \chi(x, y) = f(u) \frac{du}{dy}$$

u désignant une fonction quelconque des variables (x, y) .

Il est encore facile de s'assurer que les formules (1) et (3) subsistent sous les conditions énoncées, dans le cas même où les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\chi(x, y)$ deviennent imaginaires. Concevons, par exemple, que la fonction $f(x)$ étant algébrique, on pose

$$u = x + iy\sqrt{-1},$$

204 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

On tirera des équations (5)

$$\varphi(x, y) = f(x + y\sqrt{-1}), \quad \chi(x, y) = \sqrt{-1}f(x + y\sqrt{-1}),$$

et de la formule (3)

$$(6) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X [f(x + Y\sqrt{-1}) - f(x + y_0\sqrt{-1})] dx \\ = \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y [f(X + y\sqrt{-1}) - f(x_0 + y\sqrt{-1})] dy - \Delta. \end{cases}$$

Dans cette dernière, Δ s'évanouira si la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. Mais, si, entre ces mêmes limites, la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ devient infinie pour le système de valeurs $x = a$, $y = b$, alors la valeur de Δ sera donnée par l'équation (4); et, si l'on fait, pour abréger,

$$(7) \quad \begin{cases} (x - a - b\sqrt{-1})f(x) = \tilde{f}(x), \\ y = b + \varepsilon z, \quad z_0 = -\frac{b - y_0}{\varepsilon}, \quad Z = \frac{Y - b}{\varepsilon}, \end{cases}$$

on trouvera

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta = \sqrt{-1} \lim_{y_0} \int_{y_0}^Y [f(a + \varepsilon + y\sqrt{-1}) - f(a - \varepsilon + y\sqrt{-1})] dy \\ = \sqrt{-1} \lim_{z_0} \int_{z_0}^Z \left\{ \frac{\tilde{f}[a + \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1 + z\sqrt{-1}} \right. \\ \left. - \frac{\tilde{f}[a - \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1 + z\sqrt{-1}} \right\} dz, \end{cases}$$

Soient maintenant

$$(9) \quad \frac{\tilde{f}[a + \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1 + z\sqrt{-1}} - \frac{\tilde{f}[a - \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1 + z\sqrt{-1}} = \varpi(\varepsilon) + \sqrt{-1}\psi(\varepsilon),$$

$$(10) \quad \frac{\varpi(\varepsilon) - \varpi(0)}{\varepsilon} = \alpha, \quad \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(0)}{\varepsilon} = \beta,$$

$\varpi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ et par suite α , β étant des quantités réelles. Supposons

d'ailleurs que X surpassé y_n et que les fonctions $\tilde{\alpha}(x+t, y\sqrt{t-1})$, $\tilde{\beta}(x+t, y\sqrt{t-1})$ restent finies et continues par rapport aux variables x et y entre les limites x_0 , X , y_n , Y . Comme on aura, en vertu de la formule (9),

$$\begin{aligned} \alpha'(t) + \sqrt{t-1}\psi'(t) &= \tilde{\alpha}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{t-1}] + \tilde{\beta}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{t-1}] \\ &\quad - \tilde{\alpha}(a+\varepsilon, y\sqrt{t-1}) - \tilde{\beta}(a+\varepsilon, y\sqrt{t-1}). \end{aligned}$$

Il est clair que les valeurs numériques des quantités $\alpha'(\varepsilon)$, $\psi'(\varepsilon)$ resteront toujours très petites aussi bien que celles des deux quantités α , β dont chacune peut être présentée sous la forme $\alpha'(0\varepsilon)$ ou $\psi'(0\varepsilon)$, 0 désignant un nombre inférieur à l'unité. Gela posé, on trouvera

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t [\alpha(z) + \sqrt{z-1}\psi(z)] dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y_n}^Y (\alpha + \beta\sqrt{t-1}) dy = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t [\alpha(z) + \sqrt{z-1}\psi(z)] dz - \int_{-\infty}^t [\alpha(0) + \sqrt{z-1}\psi(0)] dz, \end{aligned}$$

puis, en faisant l'opér. $\tilde{\alpha}(a+t, b\sqrt{t-1}+t\varepsilon)$,

$$(11) \quad \Delta = \sqrt{t-1} \int_{-\infty}^t [\alpha(z) + \sqrt{z-1}\psi(z)] dz - \alpha(\sqrt{t-1}) \int_{-\infty}^t \frac{dz}{1+z^{1/2}} + 2\pi i \sqrt{t-1}.$$

Si l'on avait $y_n = b$ ou $Y = b$, l'intégrale relative à z dans la formule (11) ne devrait plus être prise qu'entre les limites $z = 0$, $z = \infty$ ou bien entre les limites $z = -\infty$, $z = 0$, et par suite la valeur de Δ se réduirait à $\pi i \sqrt{t-1}$. Dans la même hypothèse, le premier membre de l'équation (6) serait la valeur principale d'une intégrale indéterminée. Il est encore essentiel d'observer que $a+t, b\sqrt{t-1}$ représente une racine de l'équation

$$(10) \quad f(x) = 0.$$

Si cette équation admettait plusieurs racines dans lesquelles les parties fussent comprises entre les limites x_0 , X , et les coefficients de $\sqrt{t-1}$ entre les limites y_n , Y ; alors, en désignant par x_1 , x_2 , ...

206 RESEAU DES LIENS SUR LE CALCUL INTÉGRALE.
avec même racines et par l'ordre de leur apparition qui renvoient les produits

$$(x - r_1 f(x)) \cdots (x - r_n f(x)) = 0 \quad (1)$$

tandis que leurs premiers facteurs s'exposent tout au long de

$$(1') \qquad A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\chi} dx = \sum_{k=0}^n a_k \chi^k.$$

Ajoutons que chaque des termes a_0, a_1, \dots, a_n doit être calculé moins toutes les fois que, dans la partie précédente, il contient de χ^{-1} coïncide avec l'une des racines r_i de A .

Si que la fonction $f(x) = \chi^{-1}$ a au moins $n+1$ points d'ordre quel que soit $y \in \mathbb{R}$ pour $y > 0$, quel que soit x_0 alors, au moins $a_n = -c_n \chi^{-1} + b_n \chi^n + o(\chi^n)$ est vrai de la formule (1).

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\chi} dx = A$$

lorsque le terme $f(x)$ précédent entre la racine $\frac{i}{\chi}$ et tous ceux des termes t_1, t_2, \dots, t_m qui ont la racine χ^{-1} plus les termes correspondants tous à des racines de l'équation

$$(1') \qquad \Gamma(x) = 0.$$

L'expression A peut évidemment être écrrite de la manière

$$(1'') \qquad A = \text{Im} \left[\frac{\Gamma(x+i)}{\Gamma(x+i) - \Gamma(x-i)} - \frac{\Gamma(x-i)}{\Gamma(x+i) - \Gamma(x-i)} \right] \Big|_{\chi = i},$$

et l'équation (1') devient

$$(1'''') \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(x)} ds = \text{Im} \left[\frac{\Gamma(x+i)}{\Gamma(x+i) - \Gamma(x-i)} - \frac{\Gamma(x-i)}{\Gamma(x+i) - \Gamma(x-i)} \right] \Big|_{\chi = i}.$$

Dans le second membre de celle-ci, on doit remplacer la racine χ par les racines réelles de l'équation (1') avec les racines principales, celles pour lesquelles le coefficient de χ^{-1} est positif, ces racines étant telles qu'il n'y ait pas de termes (1'') correspondant à des racines doubles. Il

positif, on trouvera, pour $F(x) = 1 + x^2, x_1 = V - 1$,

$$(38) \quad \int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/4(V-1)$$

et, pour $F(x) = V - x^2, x_1 = 1, x_2 = V-1$,

$$(39) \quad \int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{V-x^2} = \frac{\pi}{4}(1-x^2)(V-1)$$

Cette dernière formule donne simplement la valeur principale de l'intégrale qu'elle renferme.

Exemple. Soit y un nombre compris entre 0 et π . Si l'on pose

$$\tan y = V - x^2$$

l'expression imaginaire

$$iy = \sqrt{V - x^2} = \sqrt{V - \tan^2 y}$$

conservera une valeur unique et déterminée tant que y restera positive (voir l'*Analys algébrique*, Chap. VII, § 1), et l'on tirera des formules (38) et (39) :

$$\text{form. } \sqrt{\int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{V-x^2}} = \sqrt{V - \tan^2 y} = \sqrt{V - i^2 y^2}$$

$$(40) \quad \int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{\sqrt{V-x^2}} = \frac{\pi}{4} \quad \int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{V-x^2} = \frac{\pi}{4} \operatorname{atan}(iy)$$

$$\sqrt{\int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{V-x^2}} = \sqrt{V - \tan^2 y} = \sqrt{V - i^2 y^2}$$

$$(41) \quad \int_{-x}^{V-1} \frac{dx}{\sqrt{V-x^2}} = \frac{\pi}{4} \operatorname{atan}(iy) = \frac{\pi}{4} y$$

Si, dans la dernière des équations (40) et la dernière des équations (41), l'on remplace i^2 par -1 et iy par α , on reproduira les formules (38) et (39) de la trentedouzième légion qui se trouveront ainsi démontrées, avec le produit des équations (41) de la trente-troisième, pour toutes les valeurs de α comprises entre les limites 0 et π .

Exercice de l'analyse. Si $0 < V < 1$, prouver

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

DÉFINITION D'UNE INTÉGRALE définie par rapport à une variable comprise dans la fonction sous le signe \int , et dans les limites de l'intégration.
INTÉGRATION DES NOUVELLES QUANTITÉS pour les fonctions dépendant de deux variables.

Soit

$$(1) \quad V = \int_{x_0}^x f(x, z) dz$$

une intégrale définie relative à x . Si, dans cette intégrale, on fait varier séparément, et indépendamment l'une de l'autre, les trois quantités Z, x_0, x , on trouvera, en vertu des théorèmes du cinquième et sixième Chapitre, et de la formule (c) (trente-troisième Leçon),

$$(c) \quad \frac{dV}{dx} = f(x, Z), \quad \frac{dV}{dx_0} = -f(x_0, Z), \quad \frac{dV}{dz} = \int_{x_0}^x \frac{df(x, z)}{dx} dz.$$

Par suite, si les deux quantités x_0, Z deviennent fonctions de la variable x , on aura, en considérant V comme une fonction de cette seule variable,

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x f(x, z) dz + J(x, Z) \frac{dx_0}{dx} - J(x, Z) \frac{dZ}{dx} \right).$$

Dans le cas particulier où x_0 se réduit à une constante, et $J(x, Z)$ à zéro, on a simplement

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(x, z) dz = \int_{x_0}^x \frac{df(x, z)}{dx} dz.$$

Exemple. — Soient $x_0 = x_0$ (x_0 désignant une valeur particulière et constante de x), $Z = x_0$ et $f(x, z) = (x - z)^n f(z)$ on obtiendra

la formule

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x (x-z)^m f(z) dz = m \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} f(z) dz,$$

de laquelle on conclura

$$(6) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} f(z) dz dx = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x (x-z)^m f(z) dz$$

et

$$(7) \quad \int \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} f(z) dz dx = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x (x-z)^m f(z) dz + C,$$

C étant une constante arbitraire. Si m se réduit à l'unité, la formule (6) donnera

$$(8) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(z) dz dx = \int_{x_0}^x (x-z) f(z) dz.$$

Il est maintenant facile de résoudre la question suivante :

PROBLÈME. — Trouver la valeur générale de y propre à vérifier l'équation

$$(9) \quad \frac{dy}{dx^n} = f(x).$$

Solution. — Comme on peut mettre l'équation (9) sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) = f(x) dx,$$

on en conclura, en intégrant les deux membres par rapport à x ,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + C$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10) \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x f(z) dz + C.$$

En intégrant de nouveau, et plusieurs fois de suite, par rapport à la

210. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL

variable x , entre les limites x_0, x_1 ayant regard aux formules (6) et (8), puis ajoutant au résultat de chaque intégration une nouvelle constante arbitraire, on trouvera ultérieurement

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x (x - \lambda f(x)) dx & \text{si } n > 1 \\ \frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^x \frac{(x - \lambda f(x))^n}{(x - x_0)^{n-1}} dx & \text{si } n = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{et} \\ \text{ou} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^x \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} dx & \text{si } n > 1 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

et enfin

$$(12) \quad \begin{cases} y = \int_{x_0}^x \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} dx + C_1 & \text{si } n > 1 \\ y = \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} + C_2 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. Il importe d'observer que l'intégrale définie comprise dans le second membre de l'équation (12) peut être aisément transformée à l'aide de la formule (17) (vingt-deuxième Leçon). En effet, si dans cette formule on remplace x par x_0 et λ par y , on obtient

$$(13) \quad \int_{x_0}^x f(z) dz = \int_{x_0}^{x-n} f(z + n) dz = \int_{x-n}^{x-n} f(z + n) dz$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} f(x) dx &= \int_{x-n}^{x-n} \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} f(x) dx = \\ &= \int_{x-n}^{x-n} \frac{(x - \lambda f(x))^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} f(x + n) dx. \end{aligned}$$

Si l'on prend, pour plus de simplicité, $x_0 = 0$, la valeur de y

donnée par l'équation (14), se réduirait à

$$(15) \quad \begin{cases} 0 & \int_{x_0}^{x_n} \frac{(t-x_0)^{n-1}}{(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_{n-1})} f(t) dt = \frac{x_0^{n-1}}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)\dots(x_{n-1}-x_0)} \\ & \quad - \int_{x_0}^{x_n} \frac{(t-x_0)^{n-2}}{(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_{n-1})} f'(t) dt + \dots + \frac{x_0^0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)\dots(x_{n-1}-x_0)} f(x_n) \end{cases}$$

et la formule (14) deviendrait

$$(16) \quad \int_{x_0}^{x_n} \frac{(t-x_0)^{n-1}}{(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_{n-1})} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(t-x_0)^{n-1}}{(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_{n-1})} f(x_n) dt.$$

Supposons de suite d'intégrales indéfinies, et que l'on se contente d'indiquer les intégrations successives, les valeurs des fonctions

$$\frac{dx_0}{dx} = \frac{dx_1}{dx} = \dots = \frac{dx_n}{dx} = \text{constante}$$

(hôtes de l'équation (9)), se présentent sous la forme

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \int f(x) dx_1 dx_0 = \int \int \int f(x) dx_2 dx_1 dx_0, \\ &\quad \vdots \quad \int \int \int \dots \int f(x) dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_0. \end{aligned}$$

Ces dernières expressions sont ce que nous appellerons des *intégrales* du premier, du second, du troisième, ..., ordre, et enfin de l'*ordre n*, relativement à la variable x . Pour distinguer, nous les désignerons dorénavant par les notations

$$(17) \quad \int f(x) dx, \quad \int \int f(x) dx_1 dx_0, \quad \int \int \int f(x) dx_2 dx_1 dx_0, \quad \dots, \quad \int \int \dots \int f(x) dx_n dx_{n-1} \dots dx_0$$

auxquelles nous substituerons les suivantes

$$(18) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx, & \int_{x_0}^{x_n} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx_2 dx_1, \quad \int_{x_0}^{x_n} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx_3 dx_2 dx_1, \dots, \\ & \quad \int_{x_0}^{x_n} \int_{x_1}^{x_2} \dots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx_n dx_{n-1} \dots dx_0 \end{cases}$$

quand nous supposerons chaque intégration relative à x effectuée

212 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL
entre les limites x_n , x . Cela posé, on aura évidemment

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_n}^x \int_{x_n}^x \cdots f(x) dx^n &= \int_{x_n}^x \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)! (n-1)!} f(x) dx \\ &= \frac{1}{(n-1)! (n-1)!} \left[x^{n-1} \int_{x_n}^x (x-t)^{n-1} dt - \frac{n-1}{n} x^{n-2} \int_{x_n}^x t (x-t)^{n-2} dt \right] \\ &\quad + \frac{n-1}{n} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \int_{x_n}^x t^2 (x-t)^{n-3} dt = x \int_{x_n}^x e^{xt} f(t) dt \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_n}^x \int_{x_n}^x \cdots f(x) dx^n &= \\ &= \frac{1}{(n-1)! (n-1)!} \left[x^{n-1} \int_{x_n}^x f(t) dt - \frac{n-1}{n} x^{n-2} \int_{x_n}^x t f(t) dt - x \int_{x_n}^x e^{xt} f(t) dt \right] \end{aligned} \right.$$

On peut vérifier directement la formule (19), à l'aide de plusieurs intégrations par parties.

Soit maintenant $F(x)$ une valeur particulière à propos de vérifier l'équation (9), en sorte qu'on ait

$$(1) \quad F(x) = f(x).$$

Si la fonction $F(x)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre n_1 , restent continues entre les limites x_n , x , alors, en prenant $x = x_n$ dans les formules (19), (19) et (20), on trouve

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= f(x) = F(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} F(x) &= F''(x), \quad \dots, \quad \frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}} F(x) = F^{(n_1)}(x). \end{aligned} \right.$$

et la formule (19) donnera

$$\left\{ \begin{aligned} F(x) - F(x_n) &= \frac{x-x_n}{1} F'(x_n) + \dots, \\ &= \frac{(x-x_n)^{n_1-1}}{(n_1-1)! (n_1-1)!} F^{(n_1)}(x_n) + \int_{x_n}^x \frac{(x-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)! (n_1-1)!} F^{(n_1)}(t) dt. \end{aligned} \right.$$

Dernière, combinée avec l'équation (19), on déduit la sui-

vaut

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots f(x) dx^n = F(x) - F(x_0) - \frac{x-x_0}{1 \cdot 2} F'(x_0) \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} F''(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(x_0), \end{array} \right.$$

qui renferme, comme cas particulier, la formule (17) de la vingt-sixième leçon. Lorsqu'on suppose $x_0 = 0$, l'équation (44) se réduit à

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots f(x) dx^n = F(x) - F(0) - \frac{x}{1} F'(0) \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(0). \end{array} \right.$$

Exemple. — Soit $F(x) = e^x$; on aura

$$f(x) = F'(x) = e^x$$

et, par conséquent,

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots f(x) dx^n = e^x - 1 - \frac{x}{1 \cdot 2} - \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots - \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \\ \qquad \qquad \qquad + \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} e^z dz. \end{array} \right.$$

TRENTE-SIAME, LEÇON

TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION DÉFINISSANT LA FONCTION D'ÉTUDE
DE L'ORDRE D'EXPOSITION D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UN INTEGRAL
ÉQUIVALENT À CEUX DÉFINIS PAR CELLES

!

Si, dans l'équation (3) de la leçon précédente, on remplace $f(x)$ par sa valeur $F'(x)$, trace de la fonction $\varphi(x)$, on trouvera, sous les mêmes conditions,

$$(4) \quad \begin{cases} F(x) - F(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+y) \frac{F(y)}{y-p} dy \\ F(x) - F(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+y)}{x+y-p} F(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+y)}{x+y-p} F(y) dy - F(p) dy \end{cases}$$

puis en posant $x = p$,

$$(5) \quad \begin{cases} F(p) - F(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p+y) \frac{F(y)}{p-y} dy \\ F(p) - F(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(p+y)}{p+y-p} F(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(p+y)}{p+y-p} F(y) dy - F(p) dy \end{cases}$$

Si l'on fait dans celles-ci $F(x) = f(x + h)$, et qu'ensuite on échange entre elles les deux lettres x et h , on obtient la l'équation

$$(6) \quad \begin{cases} f(x+h) - f(x) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+y) \frac{f(y)}{x+y-h} dy \\ f(x+h) - f(x) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+y)}{x+y-h} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+y)}{x+y-h} f(y) dy - f(x) dy \end{cases}$$

dans laquelle le dernier terme du second membre peut être présenté sous plusieurs formes différentes, puisqu'on a, en vertu des formules (15) et (16) de la trentacinquième Léçon,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \frac{(h-x)^{n-1}}{(x-x_0)(x-x_{n-1})} f^{(n)}(x-z) dz \\ \int_a^b \frac{x^{n-1}}{(x-x_0)(x-x_{n-1})} f^{(n)}(x+h-z) dz \\ \int_a^{x_0+h} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{(x-x_0)(x-x_{n-1})} f^{(n)}(z) dz \\ \int_a^b \int_a^x f^{(n)}(x-z) dz \end{array} \right.$$

L'équation (3) suppose que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ restent continues entre les limites $x = a$, $x = b$. On pourrait la déduire immédiatement de la Formule (3) en prenant $x = x_0 + h$, puis remplaçant x_0 par x et F par f . Seulement le dernier terme du second membre serait alors la troisième des intégrales comprises dans la Formule (3).

Au reste, on peut démontrer directement l'équation (3) à l'aide de plusieurs intégrations par parties, en opérant à peu près comme l'a fait M. de Bruijn dans un Mémoire publié en 1865. (En effet, si, dans la Formule (14) de la Léçon précédente, on remplace d'abord x par $x_0 + h$ et ensuite x_0 par x , on en trouve

$$(5) \quad \int_a^b f(x+z) dz = \int_a^b f(x+h-z) dz.$$

On aura donc, en conséquence,

$$(6) \quad f(x+h) - f(x) = \int_a^b f(x+z) dz - \int_a^b f(x+h-z) dz.$$

216 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

D'ailleurs, en intégrant par parties plusicurs fois de suite, on trouve

puis, en supposant que chaque intégration soit effectuée entre les limites $z=0$, $z=h$, et que les fonctions $f(x+z)$, $f'(x+z)$, ..., $f^{(n)}(x+z)$ restent continues entre ces mêmes limites,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^h f'(x+h-z) dz &= \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots \\ &\quad + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) \\ &\quad + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+h-z) dz. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, on déduira évidemment de la formule (6) une équation qui s'accordera, en vertu de la formulé (4), avec l'équation (3). La même méthode pourrait encore servir à établir directement l'équation (2).

Non seulement les intégrales renfermées dans les seconds membres des formules (2) et (3) peuvent être remplacées par plusieurs autres semblables à celles que comprend la formule (4), mais on doit encore conclure de l'équation (13) (vingt-troisième Leçon) qu'elles sont

équivalentes à deux produits de la forme

$$(4) \quad F(x,y,z) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(t,y,z) dt = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} F^n(y,z).$$

$$(iii) \quad T^{(n)}(v) = (dh) \int_{\frac{1}{n+1} \cdot \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}^{\lambda} \frac{(h - x)^{n-1}}{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n - x)^n} dx = \frac{h^n}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} f^{(n)}(v + \theta h),$$

0 désignant un nombre inconnu qui peut varier d'un produit à l'autre en restant toujours inférieure à l'unité. On aura par suite

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x) = -\text{Poisson}_1 + \frac{\beta}{\lambda} \text{Poisson}_2 + \frac{\beta^2}{\lambda(\lambda+\beta)} \text{Poisson}_3 \\ F_2(x) = \frac{\beta^2}{\lambda(\lambda+\beta)} \text{Poisson}_1 + \frac{\beta}{\lambda} \text{Poisson}_2 + \frac{\beta^3}{\lambda(\lambda+\beta)^2} \text{Poisson}_4 \end{array} \right.$$

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} f(x+h) - f(x) = \frac{h}{n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+ch), \\ f(x-h) - f(x) = -\frac{h}{n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x-ch). \end{cases}$$

Il est intéressant d'observer que la fonction $F(x)$, avec ses dérivées successives, dont rester continue, dans la formule (11), entre les limites (a, x) , et la fonction $f(x + \varepsilon)$, avec ses dérivées successives, dans la formule (12), entre les limites $(-a, x - b)$.

Suit maintenant de faire une telle fonction de plusieurs variables indépendantes, les deux et faisons

Table 7. The effect of the number of nodes on the accuracy of the solution.

On trouvera de la formule (xii) en y remplaçant ϵ par η , puis ayant regard aux principes établis dans la quatorzième leçon.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x,y) \\ &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 12 f(x,y). \end{aligned}$$

9.8. RÉSUMÉ DES RÉGLES SUR LE CALCUL D'UNE ESTIMATION

Si la quantité x devient suffisamment petite, alors cela devient nul de la différence

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

et on désignera par β cette différence, on l'appellera

$$\begin{aligned} \text{(9.8)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots \end{array} \right. \\ & f(x) = f(x_0) + \beta \end{aligned}$$

Quand les variables indépendantes x se réduisent à une seule variable x , alors, en posant $y = f(x)$, on obtient le suivant

$$\begin{aligned} \text{(9.9)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots \\ f(x) = f(x_0) + \beta \end{array} \right. \end{aligned}$$

Conservons à présent que, pour une valeur proche de x_0 attribuée à la variable x , la fonction $f(x)$ est très différente de celle qui est à celle de l'ordre $n+1$ devançant. Dans ce cas, on trouve de la formule (9.9)

$$\text{(9.10)} \quad f(x) = f(x_0) + \frac{\beta^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

puis, en substituant à la quantité finie β une quantité infinitésimale petite désignée par t ,

$$\text{(9.11)} \quad f(x) = f(x_0) + \frac{t^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} t^{n+1}$$

Lorsque, parmi les fonctions $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n+1)}(x_0)$, le premier est la seule qui ne s'évanouisse pas pour $x = x_0$, l'équation (9.11) doit être évidemment remplacée par le suivante

$$\text{(9.12)} \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x - x_0}{1!} + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Si, dans la même hypothèse, on écrit x au lieu de x_0 , et si l'on pose

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0)h,$$

l'équation (6) prendra la forme

$$\text{enfin } \Delta y = \frac{d^2}{dx^2} f(x) dx^2 + \delta y,$$

δ désignant une à peu près x une quantité infiniment petite. On pourra encore déduire de la formule (6) de l'équation (6), en observant que la valeur attribuée à x fait évanouir les différentielles dy , d^2y , ..., $d^{n-1}y$, en même temps que les fonctions dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$.

L'équation (6) fournit les moyens de résoudre le quatrième problème de la sixième leçon, dans plusieurs cas où la méthode que nous avons proposée est insuffisante. En effet, supposons que y et x désignent deux fonctions de la variable x , la valeur particulière x_0 attribuée à cette variable réduise à la forme $\frac{a}{b}$, non seulement la fraction $x = \frac{a}{b}$ mais aussi les suivantes $\frac{a+dx}{b+dx}$, $\frac{a+d^2x}{b+d^2x}$. Alors, en posant $Ax = a+dx$, et désignant par δ deux quantités infiniment petites, on aura pour $x = \frac{a}{b}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = \frac{a+dx}{b+dx} = \frac{a}{b} + \frac{dx}{b(b+dx)} \\ \text{et} \end{array} \right.$$

$$\int Ax = \frac{a^2}{b} + \frac{dx}{b} + \frac{d^2x}{b(b+dx)} + \dots$$

$$\text{d'où } x = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta a} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Ax - a}{dx} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{b} + \frac{dx}{b(b+dx)} - \frac{a}{b}}{dx} = \frac{1}{b}.$$

Exemple. — On connaît pour $x = 0$

$$\begin{array}{lll} \text{valeur } x & \text{différence } x & \text{valeur } x + dx \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

TRENTE-SEPTIÈME ÉLÉGON.

PROBLÈME DE L'AVANTAGE DES MÉTHODES EXACTES SUR CELLES APPROXIMATIVES
DE LA MÉTHODE DES SÉRIES

On appelle *somme partielle* n-ième de la série :

$$(1) \quad S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

qui dérivent les m-ièmes autres suivant une loi comme ceci :

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2, \quad \dots, \quad a_n = a_n$$

la somme des n premiers termes, c'est-à-dire un nombre quelconque. Si, pour des valeurs de x suffisamment proches, la somme s'approche indéfiniment d'une certaine limite α , la série sera dite *convergente*, et la limite α représentée par la notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$$

s'appellera la *somme de la série* ou, au contraire, l'ordre que si elle était indéfiniment la somme α on s'approche d'autant la limite réelle, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme correspondant à l'indice n , avec n croissant le degré général de plus, si dans la première hypothèse sur $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n$, on appelle *le reste de la somme* à partir du n-ième terme.

Ces définitions étant admises, il résulte évidemment des formules (2) et (3) de la trente-septième Élégon que les rapports

$$(2) \quad \frac{P(x)}{P(x_0)} = \frac{\frac{d}{dx} P(x_0)}{\frac{d}{dx} P(x_0)} = \frac{\frac{d}{dx} P(x_0)}{\frac{d}{dx} P(x_0)} = \dots = \frac{d}{dx} P(x_0)$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{b}{1} f(x_0) - \frac{b^2}{x_0} f'(x_0) + \frac{b^3}{2!} f''(x_0) - \frac{b^4}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

seront convergentes, et auront pour sommes respectives les deux fonctions $F(x)$, $f(x) - h$, toutes les fois que les deux intégrales

$$(6) \quad \int_{x-h}^x \frac{t^k}{(t-x)^{n-k}} dt = \frac{x^{n-k}}{n-k} F(x),$$

$$(7) \quad \int_{x-h}^x \frac{t^k}{(t-x)^{n-k}} f(t) dt = \frac{x^{n-k}}{n-k} f(x) + h,$$

convergeront, pour de valeurs croissantes de n , vers la limite zéro, si l'on trouvera, en conséquence,

$$(8) \quad F(x) - F(x-h) = \frac{1}{n} F(x) - \frac{1}{n} F(x) + \frac{1}{n} f(x) - h,$$

si l'expression n'est évidemment pas valable pour des valeurs infinies de n , et

$$(9) \quad f(x) - f(x-h) = \frac{h}{n} F(x) - \frac{h}{n} f(x) + \frac{h}{n} f(x) - h,$$

si l'expression n'est valable à la même condition. Ces formules (6) et (7) renferment les théorèmes de MacLaurin et de Taylor. Elles servent, quand les intégrables (4) et (5) remplissent les conditions prescrites, à développer les deux fonctions $F(x)$ et $f(x) - h$ en séries ordinaires suivant les puissances ascendantes et descendantes des quantités x et h . Le centre de ce rapport sont précisément les deux intégrales dont nous venons de parler.

Supposons toutefois que l'on divise par $x - f(x)$, ou $x - h$, une fonction de plusieurs variables indépendantes, et qu'aux équations (6) et (7) de la page précédente on substitue l'équation (1). On conclura de cette dernière

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x-h)}{x - f(x)} = \frac{F(x) - F(x-h)}{x - f(x)}, \\ (10) \quad & \left(1 - \frac{f(x-h)}{x-f(x)}\right) \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} F(x) - \frac{d}{dx} F(x-h). \end{aligned}$$

Toutes les fois que le terme $\frac{d}{dx} F(x-h)$, ou plutôt l'intégrale

la fonction

$$(44) \quad \frac{(x-a)^{n-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} P^n(x)$$

pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites a et x . Cette dernière condition sera évidemment remplie, si la valeur numérique de l'expression $P^n(x)$, supposée réelle, ou le module de la même expression, supposée imaginaire, ne croît pas indéfiniment, pendant que n augmente. En effet, puisque la quantité

$$m(n-m) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-m\right)^2$$

croît avec le nombre m entre les limites $m = 1$, $m = \frac{n}{2}$, et que l'on a par suite

$$\left|m(n-m) - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right| < \left|\frac{n}{2}(n-m) - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right|$$

on peut affirmer que la valeur numérique ou le module de l'expression (44) restera toujours inférieure à la valeur numérique ou au module du produit

$$(45) \quad \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 |P^n(x)|$$

On ce produit deviendra nul, dans l'hypothèse admise, pour $n = \infty$.

Exemples. — Si l'on prend pour valeurs successives de la fonction $P^n(x)$

$$\sin x, \sin^2 x, \sin^3 x,$$

on trouvera pour les valeurs correspondantes de $P^n(x)$

$$\sin^2 x = \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \alpha\right), \quad \sin^3 x = \sin\left(\frac{3\pi x}{2} + \alpha\right).$$

Comme ces dernières quantités restent finies, quel que soit x , tandis que n augmente, on doit en conclure que le théorème de MacLaurin est toujours applicable aux trois fonctions proposées. On aura, en

TRENTIETIÈME LEÇON.

PROBLÈME CONCERNANT DES SÉRIES. APPLICATION DE CES RÈGLES
À LA SÉRIE DE MACLAURIN.

Les équations (1) et (2) de la trentième leçon ne pouvant subsister que dans le cas où les séries (1) et (2) sont convergentes, il importe de fixer les conditions de la convergence des séries. Tel est l'objet dont nous allons nous occuper.

Une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$(1) \quad s_1 = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

qui a pour terme général $a x^n$, où la somme de ses n premiers termes, savoir

$$s_n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1} = \frac{a(1 - x^n)}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} - \frac{ax^n}{1 - x}$$

converge évidemment, pour des valeurs croissantes de n , vers la limite fixe $\frac{a}{1 - x}$, si la valeur numérique de la variable x supposée réelle, ou le module de la même variable supposée imaginaire, est un nombre inférieur à l'unité. Tandis que, dans le cas contraire, cette somme risque de converger vers une sensible limite, la série (1) sera donc toujours convergente dans le premier cas et toujours divergente dans le second. Cette conclusion subsiste lors même que le facteur a devient imaginaire.

Considérons maintenant la série

$$\{s_k\} \quad s_{k+1} - s_k = a_kx - a_{k-1}x^2 - \dots - a_0x^k < 0$$

composée de termes quelconques réels ou imaginaires. Pour décider

devra en dire autant de la série (4) et, par conséquent, de la série (2).

Supposons en second lieu $\pi < \alpha$, et plâgions entre les deux nombres π et α un troisième nombre p_n en sorte qu'on ait $\pi < p_n < \alpha$. Si n vient à croître au delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(p_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indefiniment de π , finiront par surpasser p_n et pourront donc adéquate à la condition $(p_n)^{\frac{1}{n}} < p_n$, $(p_n)^{\frac{1}{n}} > p_n^{\alpha}$, et par des valeurs de α assez considérables que l'on voudra; et par suite, on trouvera dans la série (2) un nombre infini de termes supérieurs à l'unité, ce qui suffira pour constater la divergence des séries (2), (3) et (4).

Théorème II. — *Si, pour des valeurs croissantes de n , le rapport $\frac{(p_n)^{\frac{1}{n}}}{p_n}$ converge vers une limite finie, la série (2) sera convergente toutes les fois que l'on aura $\pi < \alpha$, et divergente toutes les fois que l'on aura $\pi > \alpha$.*

Démonstration. — Considérons arbitrairement un nombre ϵ inférieur à la différence $\alpha - \pi$ qui existe entre ces deux nombres. Il sera possible d'attribuer à une valeur assez considérable pour que n devient égal ou supérieur à m , le rapport $\frac{(p_n)^{\frac{1}{n}}}{p_n}$ devienne toujours compris entre les deux limites $\pi + \epsilon$ et $\alpha - \epsilon$. Alors les différents termes de la série (2) se trouveront compris entre les termes correspondants des deux progressions géométriques

$$\begin{aligned} \pi(1 + \epsilon)^{\frac{1}{n}} &- \pi(1 - \epsilon)^{\frac{1}{n}} &= \pi^{1 - \frac{1}{n}}(\pi + \epsilon - \pi - \epsilon) \\ &= \pi^{1 - \frac{1}{n}}\epsilon &< \epsilon. \end{aligned}$$

Lesquelles seront toutes deux convergentes, si l'on a $\pi < \alpha$, et toutes deux divergentes, si l'on a $\pi > \alpha$. D'où, etc.

Seconde. — Il serait facile de prouver que le limite du rapport $\frac{(p_n)^{\frac{1}{n}}}{p_n}$ dans le cas où cette limite existe, est en même temps celle de l'exponentiel $(p_n)^{\frac{1}{n}}$ [Voir l'*Exposé sur les logarithmes* (1), Chap. VI].

pour somme. Ensuite toutes les fois que, la variable x étant réelle et la variable ω étant comprise entre les limites 0 , π , l'expression (1) (trente-septième Lesson) s'évanouit pour des valeurs infinies de n . De cette dernière condition sera évidemment satisfait si l'expression dont il s'agit est le terme général d'une série convergente, ce qui aura lieu, en vertu du théorème III, si, pour des valeurs croissantes de n , le module ou la valeur numérique du produit

$$(8) \quad \frac{1}{n} \left(\frac{p}{\sin \omega n} - \frac{q}{\cos \omega n} \right)$$

converge vers une limite inférieure à l'unité.

Exemples. — Soit

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

p désignant une quantité constante. Si dans l'expression (8) on remplace ω par nx , cette expression devient

$$\frac{1}{n} \left(\frac{p}{\sin nx} - \frac{q}{\cos nx} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{p}{x} - \frac{q}{x} \right)$$

et converge pour des valeurs croissantes de n vers une limite de la forme $-x \frac{p-q}{x}$, limite dont la valeur numérique sera inférieure à l'unité, si l'on suppose $|x| < 1$. On aura donc, sous cette condition, l'unité, si l'on suppose $|x| < 1$. On aura donc, sous cette condition,

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{p}{\sin nx} - \frac{q}{\cos nx} \right) = p(p-q)x - q(p+q)x.$$

On prouvera de même que l'équation

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{p}{\sin nx} + \frac{q}{\cos nx} \right) = p(p+q)x + q(p-q)x$$

s'obtient pour des valeurs réelles ou imaginaires de la constante a , tant que la valeur numérique de x est inférieure au module de $\frac{1}{a}$.

On pourrait voir que la série (6) a toujours $F(x)$ pour somme, quand elle est convergente, et que, dans le cas où ses différents termes s'évanouissent l'un après l'autre, la fonction $F(x)$ s'évanouit

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

DES EXPONENTIELLES ET DES LOGARITHMES IMAGINAIRES. CRÂGE DE CES EXPONENTIELLES
ET DE CES LOGARITHMES. DONCE LA DÉTERMINATION DES INTEGRALPS SOIT DÉFINIE
SOUV. INDÉFINIE.

Nous avons prouvé dans la trent-septième leçon que l'exponentielle A^x (A désignant une constante positive, et x une variable réelle) est toujours équivalente à la somme de la série

$$(1) \quad e^x = \frac{e^A - e^{-A}}{2} + \frac{e^{2A} - e^{-2A}}{4} + \frac{e^{3A} - e^{-3A}}{6} + \dots$$

on sorte qu'on a, pour toutes les valeurs réelles de a ,

$$(2) \quad A^x = \frac{e^{Ax} - e^{-Ax}}{2} + \frac{e^{2Ax} - e^{-2Ax}}{4} + \frac{e^{3Ax} - e^{-3Ax}}{6} + \dots$$

D'autre part, comme, en vertu du théorème III de la trente-huitième leçon, la série (2) reste convergente pour des valeurs imaginaires quelconques de la variable x , on est convenu d'étendre l'équation (2) à tous les cas possibles, et de s'en servir, dans le cas où la variable x devient imaginaire, pour fixer le sens de la notation A^x . Cette convention étant adossée, on déduit facilement de l'équation (2) plusieurs formules remarquables que nous allons faire connaître.

D'abord, si l'on prend $A = e$, l'équation (2) deviendra

$$(3) \quad e^x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} + \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{6} + \dots$$

Si l'on pose dans cette dernière $x = z\sqrt{-1}$ (z désignant une variable

232 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL.
réelle), on trouvera

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 &= \frac{2x}{1} + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \dots \\ &= 2x + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(1) \quad e^{2x} = 1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{2} + \dots$$

On trouvera de même

$$(2) \quad e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2 x^2}{2} - \dots$$

puis on soustraîtra des équations (1) et (2) et on divise le résultat entre elles.

$$(3) \quad \frac{e^{2x} - 1}{e^{-2x} - 1} = \frac{1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{2} + \dots}{1 - 2x + \frac{2^2 x^2}{2} - \dots}$$

Soit, en second lieu, $x = a + b\sqrt{-1}$, où a et b sont deux constantes réelles. Alors le terme a apparaît dans la deuxième membre de la formule (3) sans préalablement avoir été déduit du théorème de MacLaurin, appliquée à la fonction $f(x) = e^{2x}$ au point $x = a + b\sqrt{-1}$. On aura donc

$$(4) \quad e^{2(a+b\sqrt{-1})} = 1 + 2(a+b\sqrt{-1}) + \frac{2^2 (a+b\sqrt{-1})^2}{2} + \dots$$

Cette dernière formule est analogique à l'équation (1) imaginée

$$e^{2(a+b\sqrt{-1})} = 1 + 2(a+b\sqrt{-1})$$

de laquelle on la déduira, mais pour toutes les deux raisons suivantes, en substituant à la constante réelle b une constante imaginaire $b\sqrt{-1}$. Nous ajouterons qu'en s'appuyant sur la formule (4) nous étendîmes cette première équation

$$(5) \quad e^{ax+bx'} = e^ax e^{bx'}$$

à des valeurs imaginaires quelconques des variables x , x' ; et qu'en comparant la formule (2) à la formule (3) on en tire, pour une

valeur quelconque de x .

$$(9) \quad \lambda^x = u + v\lambda$$

Conservons maintenant que, u et v désignant deux quantités réelles, on cherche les diverses valeurs de x propres à résoudre les deux équations

$$(10) \quad \lambda^x - u + v\lambda = 0$$

$$(11) \quad \lambda^x - u - v\lambda = 0$$

Les diverses valeurs seront les divers *logarithmes* de $u + v\lambda$ — 1 dans le système dont la base est λ ; et dans le système népérien dont la base est e . De plus, comme, en vertu de la formule (5), les logarithmes de l'expression $u + v\lambda$ — 1 dans le premier système seront égaux aux logarithmes népériens de cette même expression divisée par λ , il suffira de résoudre l'équation (11). Cela posé, faissons $a = u + v\lambda$ — 1, $c = v\beta$ désignant deux quantités réelles. La formule (11) deviendra

$$e^{ax} = a + c\lambda = 0$$

puis l'on en tirera $e^{ax} \cos \beta = -a$, $e^{ax} \sin \beta = c$, et, par conséquent,

$$(12) \quad e^{ax} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$(13) \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \sin \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Or, on satisfait à l'équation (13) par une seule valeur réelle de x , savoir $x = \frac{1}{2} \arctan \frac{c}{a}$. De plus, en désignant par n un nombre entier arbitraire, on satisfera aux équations (13) par toutes les valeurs de β comprises dans la formule

$$(14) \quad \beta = \arcsin \frac{c}{a} + \arctan \frac{c}{a}$$

si a est positif, ou dans la suivante

$$(15) \quad \beta = (\alpha n + \frac{1}{2})\pi + \arctan \frac{c}{a}$$

Où l'on a $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

235. RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINIMENT

si a devient négatif. Il existe donc une infinité de logarithmes imaginaires de l'expression $a + \sqrt{-1}$. Le plus simple de tous ces logarithmes, dans le cas où la quantité $a + \sqrt{-1}$ est positive, est celui qu'on obtient en posant $a = 0$, savoir : $\frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) - i \arctan(b/a)$. Ce même logarithme, qui, pour une valeur nulle de a , est égal au logarithme réel de b , sera celui que nous désignerons par la notation $\ln(a + \sqrt{-1})$ (voir l'*Analyse algébrique*, Chap. IV), au sujet qu'en aura pour des valeurs positives de a .

$$(16) \quad \ln(a + \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) - i \arctan(b/a)$$

Par suite, si x représente une quantité positive, et y une autre compris entre les limites $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, l'équation

$$(17) \quad x + \sqrt{-1}y = \sqrt{x^2 + y^2} e^{iy}$$

entrainera la suivante

$$(18) \quad \ln(x + \sqrt{-1}y) =$$

les formules qui servent à différencier les exponentielles et les logarithmes réels subsistent, lorsque ces exponentielles et ces logarithmes deviennent imaginaires. Ainsi, par exemple, on connaît sans peine que l'on a : i^n pour des valeurs négatives de la variable n ,

$$(19) \quad de^x = e^x dx,$$

$$(20) \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

n pour des valeurs négatives des variables x , y , z et des constantes a , b ,

$$1) \quad de^{ax^2 + bx + c} = (dx + dy\sqrt{-1})$$

$$2) \quad d(\sqrt{-1}x^2 + bx + c) = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}}$$

$$(33) \quad \begin{cases} d\{[(a - c + \beta V)^{-1}]^r\} = \frac{dr}{(a - c + \beta V)^{r+1}} \\ d\{[(a - c + \beta V)^{-1}]^r\} = \frac{dr}{(a - c + \beta V)^{r+1}} \end{cases}$$

$$(34) \quad dz^{(a+bV^{-1})^r} = e^{(a+bV^{-1})r}(a+bV^{-1})^rdz.$$

Dans ces diverses formules, on doit adopter, après la lettre b , le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que l'expression imaginaire dont on prend le logarithme népérien a une partie réelle positive ou négative. De ces mêmes formules on déduira immédiatement les suivantes:

$$(35) \quad \begin{cases} \int \frac{(A - BV - C)^r dz}{a - c + \beta V^{-1}} = (A - BV - C)^r \cdot [(a - c + \beta V^{-1})^r + 1] \\ \int \frac{(A + BV - C)^r dz}{a - c + \beta V^{-1}} = (A + BV - C)^r \cdot [(a - c + \beta V^{-1})^r + 1] \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \int e^{(a+bV^{-1})^r dz} = \frac{e^{(a+bV^{-1})^r}}{a + bV^{-1}} + C \\ \int e^{(a+bV^{-1})^r dz} = \frac{e^{(a+bV^{-1})^r}}{a + bV^{-1}} \left[1 - \frac{n}{(a + bV^{-1})^n} + \frac{n(n-1)}{(a + bV^{-1})^{n+1}} (a + bV^{-1})^r \right] \end{cases}$$

Ce qui nous permet de dire que les deux dernières formules s'accordent avec les formules établies dans les vingt-huitième et trentième leçons.

Les exponentielles et les logarithmes imaginaires peuvent encore être employés avec avantage dans la détermination des intégrales définies. Ainsi, par exemple, il résulte de la seconde des équations (26) que la formule donnée ligne 13 de la page 174 subsiste quand on y remplace la constante a supposée réelle par la constante imaginaire $a + bV^{-1}$. On obtient alors l'équation

$$(37) \quad \int_a^\infty z^a e^{(a+bV^{-1})^r dz} = \frac{(a+bV^{-1})^r}{(a + bV^{-1})^{r+1}}$$

laquelle coïncide avec la formule de la ligne 14 de la page citée. De plus, il est clair que la formule (18) de la trente-quatrième leçon

236 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITESIMAL
subsistera encore, si, au lieu de prendre pour forme fonction algé-
brique, on pose successivement

$$f(x) = \varphi(x)/V - W(x) + U(x) - V^{\frac{1}{2}} \log \left(\frac{V}{\sqrt{V} - \varphi(x)} \right) - \frac{W(x) - U(x)}{V^{\frac{1}{2}} \log \left(\frac{V}{\sqrt{V} - \varphi(x)} \right)}$$

μ, m, n désignant trois constantes positives, dont la première peut être comprise entre les limites 0 et π , on trouvera une approximation,

$$(38) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{x+\mu V^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-t^2}}{V+t^2} dt - \int_{-\infty}^{x+\mu V^{\frac{1}{2}}+nV^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-t^2}}{V+t^2} dt.$$

$$(39) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C - \varphi(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}}{V+t^2} e^{-t^2} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C - \varphi(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}}{V+t^2} e^{-t^2} dt - \frac{C}{V^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{V+t^2}.$$

$$(40) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C - \varphi(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}}{V+t^2} e^{-t^2} dt & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}} - U(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}}{V+t^2} e^{-t^2} dt & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}(W(U(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}} - U(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}))}{V+t^2} e^{-t^2} dt & \text{cas où } C = 0, \text{ ou } \varphi(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}}(W(U(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}} - U(V^{\frac{1}{2}} - t)^{\frac{1}{2}})) = 0. \end{cases}$$

QUARANTIÈME LEÇON.

INTEGRATION PAR STADES.

Considérons une série

(1)
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + \dots$$

dont les différents termes soient des fonctions de la variable x qui restent continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$. Si, après avoir multiplié ces mêmes termes par dx , on les intègre entre les limites dont il s'agit, on obtiendra une série nouvelle composée des intégrales définies

(2)
$$\int_{x_0}^X u_0 dx_0 + \int_{x_0}^X u_1 dx_1 + \int_{x_0}^X u_2 dx_2 + \int_{x_0}^X u_3 dx_3 + \dots + \int_{x_0}^X u_N dx_N + \dots$$

En comparant cette nouvelle série à la première, on obtiendra sans peine le théorème que nous allons énoncer.

Théorème 1. — *Supposons que, les deux limites x_0 , X étant des quantités finies, la série (1) soit convergente, non seulement pour $x = x_0$ et pour $x = X$, mais aussi pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X . La série (2) sera elle-même convergente; et si l'on appelle s la somme de la série (1), la série (2) aura pour somme l'intégrale*

$$\int_{x_0}^X s dx.$$

En d'autres termes, l'équation

(3)
$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$